Courant Alternatif

Travaux Dirigés: Semestre-S3-

Electricité 2: Groupe B- Série 4

December 7, 2011

1 Exercice 1: Relation entre R_1, R_2, L

Méthode graphique

U est commune entre les deux branches, on la prendra comme référence des phases. La branche R_1, L est inductive, i_1 est alors en retard de phase par rapport à u. Par contre dans la branche capacitive R_2, C, i_2 est en avance par rapport à u; voir figure[1].

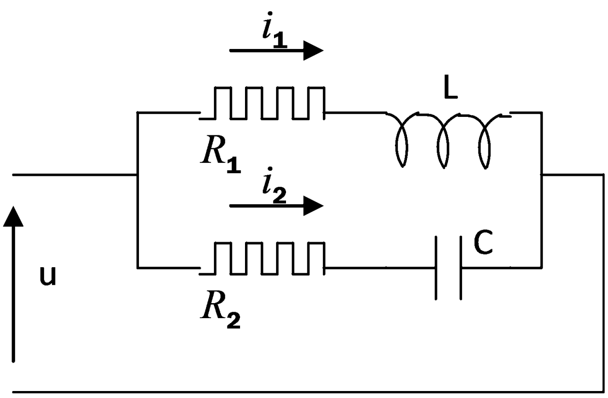

Figure 1:

D'autre part, nous avons

$$\vec{U}_{R_1} + \vec{U}_L = \vec{U}$$

$\vec{U}_{R_1}$ est en phase avec $\vec{I}_1$, $\vec{U}_L$ est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur $\vec{I}_1$.
De même

$$\vec{U}_{R_2} + \vec{U}_C = \vec{U}$$

$\vec{U}_{R_2}$ est en phase avec $\vec{I}_2$, $\vec{U}_C$ est en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur $\vec{I}_2$.

D'où le diagramme de Fresnel suivant

[1]Coordonnateur des étudiant: houssaam elmahdi, hoho_hetler@hotmail.fr

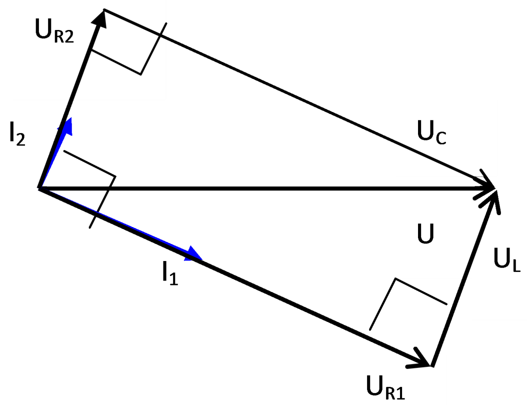

Figure 2:

On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} U_{R_1} = U_C \\ U_{R_2} = U_L \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R_1 I_1 = \frac{1}{C\omega} I_2 \\ R_2 I_2 = L\omega I_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} R_1 C\omega I_1 = I_2 \\ R_2 R_1 = \frac{L}{C} \end{array}\right.$$

Méthode des complexes

Nous avons

$$\begin{aligned} U &= R_1 I_1 + jL\omega I_1 \\ &= R_2 I_2 + \frac{I_2}{jC\omega} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{array}{lll} \phi_1 = (I_1, U) & \Rightarrow & \tan\phi_1 = \frac{L\omega}{R_1} \\ \phi_2 = (I_2, U) & \Rightarrow & \tan\phi_2 = \frac{1}{R_2 C\omega} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow & \cos(\phi_1 + \phi_2) = \left\{\begin{array}{l} = 0 \\ \quad = \cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2 \end{array}\right. \\ & \Rightarrow & \tan\phi_1 \tan\phi_2 = \left\{\begin{array}{l} = 1 \\ \quad = \frac{L\omega}{R_1} \times \frac{1}{R_2 C\omega} \end{array}\right. \end{array}$$

soit

$$\frac{L\omega}{R_1 R_2 C\omega} = 1 \quad \Rightarrow \quad R_1 R_2 = \frac{L}{C}$$

2 Exercice 2

Le circuit estalimenté par une tension sinusioidale u de pulsation ω.

3 Questions

1) Calcul de l'impedence complexe Z_1 de l'inductance L

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} = \frac{R + jL\omega}{jRL\omega} \Rightarrow Z_1 = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

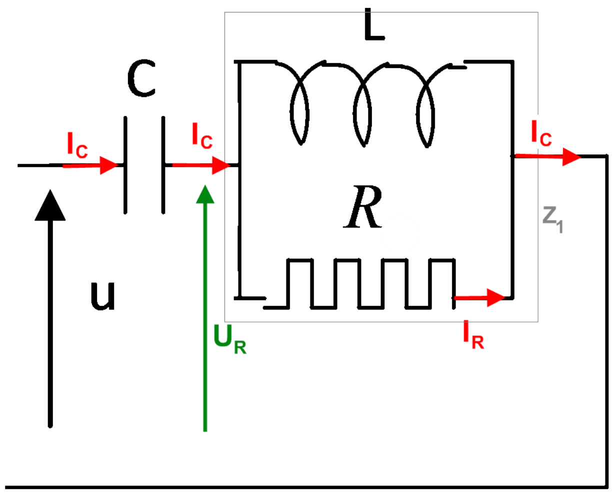

Figure 3:

2) Expression complexe I_C du courant traversant la capacité C

$$U = ZI_C$$

avec

$$Z = \frac{1}{jC\omega} + Z_1$$

donc

$$I_C = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\frac{1}{jC\omega} + Z_1} = \frac{U}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}}$$

3) Expression complexe I_R du courant traversant R en fonction de Z_1, I_C et R

$$U_R = RI_R = Z_1 I_C$$

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{Z_1 I_C}{R} \\ &= \frac{jRL\omega}{R\,(R + jL\omega)} \times \frac{U}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}} \\ &= \frac{jL\omega U}{\frac{R+jL\omega}{jC\omega} + jRL\omega} \\ &= \frac{LC\omega^2 U}{R\,(LC\omega^2 - 1) - jL\omega} \end{aligned}$$

pour le cas

$$\left(LC\omega^2 - 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad I_R = jC\omega U = \frac{U}{\frac{1}{jC\omega}}$$

qui est indépendant de R.

3 Exercice 3

On donne le circuit:

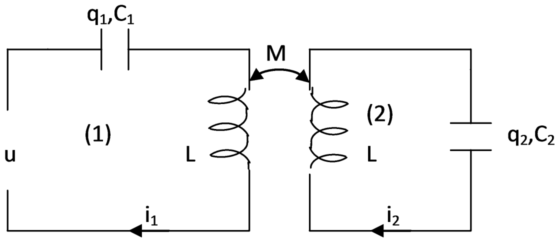

Figure 4:

Loi d'Ohm

(i) Circuit (1)

$$u = \frac{q_1}{C} + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

avec

$$i_1 = \frac{dq_1}{dt}$$

(ii) Circuit (2)

$$0 = \frac{q_2}{C} + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

avec

$$i_2 = \frac{dq_2}{dt}$$

en notation complexe $\bar{U}$

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \left(\tfrac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) I_1 + jM\omega I_2 \qquad (1) \\ 0 &= \left(\tfrac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) I_2 + jM\omega I_1 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad I_2 = \tfrac{-jM\omega I_1}{\frac{1}{jC\omega}+jL\omega} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} (1)+(3) \quad \Rightarrow \quad \bar{U} &= \left(\tfrac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) I_1 + jM\omega \left(\tfrac{-jM\omega I_1}{\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{jC\omega} + jL\omega + \tfrac{M^2\omega^2}{\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\right) I_1 \\ &= ZI_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} - \frac{M^2\omega^2}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}\right) \\ &= j\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 - M^2\omega^2}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} = j\frac{\frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 - M^2\omega^2}{\frac{L}{\omega}\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)} \end{aligned}$$

$$\left|\bar{Z}\right| = \left|\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 - M^2\omega^2}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}\right|$$

Etude de la variation de Z en fonction de

Z est nul pour

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm M\omega \qquad \Rightarrow \qquad (L \mp M)\,\omega^2 = \frac{1}{C}$$

$$\begin{array}{lll} (L+M)\,\omega_1^2 & = \frac{1}{C} & \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{C(L+M)}} \\ (L-M)\,\omega_2^2 & = \frac{1}{C} & \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{C(L-M)}} \end{array}$$

avec comme condition $L \neq M$, ce qui est toujours vrai puisque on a toujours

$$M^2 < L_1 L_2 = L^2 \Rightarrow M < L$$

Z est infini

$$Z = j\,\frac{\frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 - M^2\omega^2}{\frac{L}{\omega}\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)} \to \infty$$

pour

$$\omega_3 = 0 \quad , \quad \omega_4 = \tfrac{1}{LC}$$

Le système se comporte comme un *circuit résonant* au voisinage de ω_1 et ω_2 c'est-à-dire *laisse passer un courant infini* débité par le générateur de pulsation ω_1 ou ω_2.

Par contre il se comporte comme un *circuit bouchon* (*antirésonance*) au voisinage de ω_4 c'est-à-dire arrête totalement le courant débité par un générateur de pulsation ω_4.

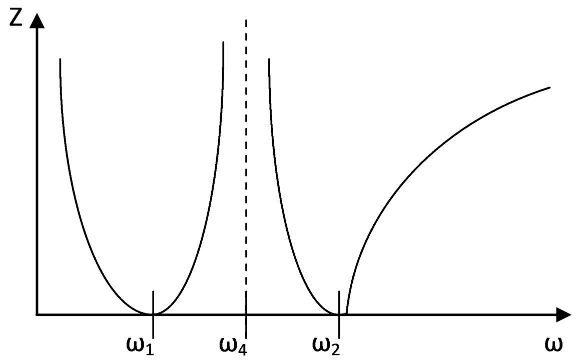

Figure 5:

4 Exercice 4