Induction Electromagnétique, Inductance et Energie Magnétique

Travaux Dirigés: Semestre-S3-

Electricité 2: Groupe B- Série 3

November 23, 2011

1 Inductance Electromagnétique

On donne un système formé de deux rails conducteurs $(MM\prime)$ et $(NN\prime)$ parallèles à $\vec{e}_x$ distant de a

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\overrightarrow{M'N'}\right\| = a$$

Les rails sont reliés par une résistance R et un générateur de force electromotrice (fem) E

Un barreau conducteur (AA') parallèle à $\vec{e}_y$ et de masse m se met à se déplacer sans frottement et perpendiculairement aux rails $\left(\text{ cela veut dire } \vec{R} + m\ \vec{g} = \vec{0}\right)$

Soit $i\,(t)$ le courant total parcourant le circuit à l'instant t; *voir le schéma* [1]

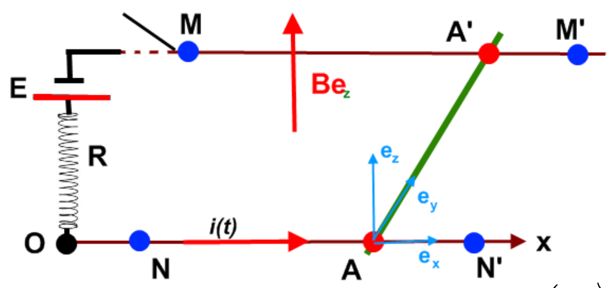

Figure 1: spire circulaire de centre O et de rayon b. $d\vec{B} \perp \left(I\,\overrightarrow{dl}, \overrightarrow{PM}\right)$. Coordonnées $M = (\rho, \theta, z)$

3 *Questions*

(1) *Expliquer ce qui se passe quand on ferme l'interrupteur K*

Quand on ferme K il y a un courant qui circule dans le circuit $i\,(t)$.

[1]Coordonnateur des étudiant: houssaam elmahdi, hoho_hetler@hotmail.fr

Le barreau $\overrightarrow{AA'}$ est soumis alors à une force de Laplace $\vec{F}_L$ qui le fait déplacer suivant l'axe des x

$$\vec{F}_L \sim \vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z \sim B\vec{e}_x$$

D'où naissance d'une f.e.m $e(t)$ *induite* et d'un courant *induit* $i_{ind}(t)$ qui va s'opposer au déplacement du barreau.

(2) i) *détérmination de la force $\vec{F}_L$ exercée sur le barreau à l'instant t*

$$d\vec{F}_L = i(t)\, dy\ \vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = i(t)\, Bdy\ \vec{e}_x$$

Par integration

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \int_0^a i(t)\, Bdy\ \vec{e}_x = i(t)\, B\vec{e}_x \int_0^a dy \\ &= i(t)\, Ba\vec{e}_x \end{aligned}$$

ii) Expression de $i(t)$ en fonction de $\frac{d\vec{v}}{dt}$

La loi fondamental de la dynamique implique

$$\vec{F}_L + \underbrace{\left(m\ \vec{g} + \vec{R}\right)}_{=0} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{dv}{dt}\vec{e}_x$$

soit également

$$\vec{F}_L = i(t)\, Ba\vec{e}_x = m\frac{dv}{dt}\vec{e}_x$$

et par suite

$$i(t) = \frac{m}{Ba}\frac{dv}{dt}$$

3) *Le champ éléctromoteur $\vec{E}_m(t)$*

$$\begin{aligned} \vec{E}_m(t) &= \vec{v} \wedge \vec{B} \qquad \text{voir cours} \\ &= v\vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z = -vB\vec{e}_y \end{aligned}$$

la *force éléctromotrice induite* $e(t)$ en fonction de $v(t)$

$$\begin{aligned} e(t) &= \int_A^{A'} \vec{E}_m(t)\, .\overrightarrow{dl} \qquad \text{voir cours} \\ &= \int_A^{A'} \vec{E}_m(t)\, dy\vec{e}_y \\ &= -vB\vec{e}_y.\vec{e}_y \int_A^{A'} dy \\ &= -vB\int_0^a dy = -vBa \end{aligned}$$

2 fem dans une spire fixe dans $\vec{B}$ tournant

On donne:
- un repère $\mathcal{R}(O, xyz)$ fixe de bse $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$
- une spire carrée dans le plan xOz
- un champ magnétique $\vec{B}(t) = B_0\vec{u}$ tournant autour de $\Delta = Oz$ à la vitesse angulaire ω

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \theta = \widehat{\left(\vec{i}, \vec{u}\right)},$$

avec

$$\omega = -|\omega|, \qquad \theta = \omega t = -|\omega| t$$

Noter que dans cet exercice, le champ $\vec{B} = B_0\vec{u}$ ne depend pas des coordonnées (x, y, z).

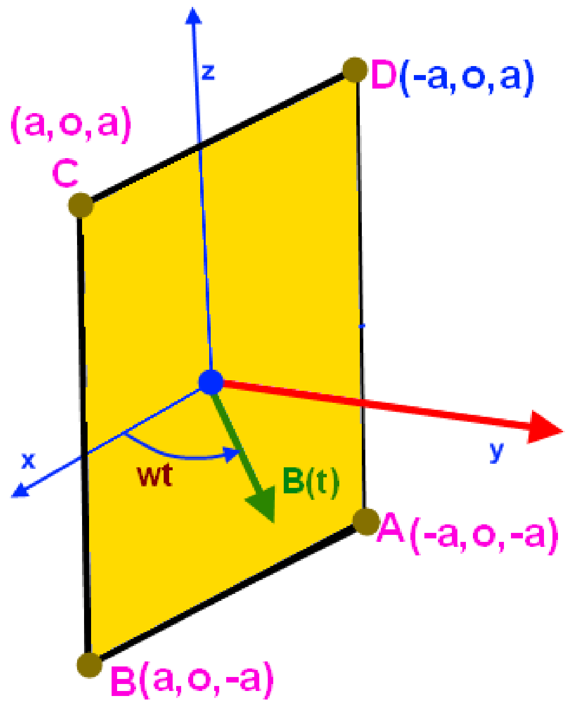

Figure 2: une spire fixe dans un champ magnétique variant dans le temps

Questions

(a) Composante de $\vec{B} = B_0\vec{u}$ et $\frac{d\vec{B}}{dt} = B_0\frac{d\vec{u}}{dt}$ dans $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

$$\begin{aligned} B_0\vec{u} &= B_0\left(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta\right) &&= B_0\left(\vec{i}\cos|\omega| t - \vec{j}\sin|\omega| t\right) \\ B_0\frac{d\vec{u}}{dt} &= B_0\omega\left(-\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta\right) &&= -B_0|\omega|\left(\vec{i}\sin|\omega| t + \vec{j}\cos|\omega| t\right) \end{aligned}$$

(b) Champ éléctrique induit dans la spire

D'après les 4 équations de Maxwell, nous avons

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

puisque

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = rot\vec{A}$$

il en découle

$$\begin{aligned} rot\ \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\vec{A}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}\right) \\ &= -rot\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) \end{aligned}$$

soit encore

$$rot\ \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\operatorname{grad} V$$

resultat

$$\vec{E} = \begin{cases} -\operatorname{grad} V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \\ \vec{E}_s + \vec{E}_m \end{cases} \qquad \text{avec} \begin{cases} \vec{E}_s = -\operatorname{grad} V \\ \vec{E}_m = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \end{cases}$$

Le champ électrique est la somme de *2 termes*: $\vec{E}_s$ créer par des charge statique et $\vec{E}_m$ créer par la variation temporelle du champ magnétique $\vec{B} = \vec{B}(t)$ et donc du courant éléctrique $i = i(t)$.

Expression explicite de $\vec{E}_m$ en utilisant la relation

$$\vec{A}(t, r) = \frac{1}{2}\left(\vec{B}(t) \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \frac{1}{2}\vec{B}(t) \wedge \vec{r}, \qquad cours!$$

avec $M \in$ à la spire; soit:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + z\vec{k}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{0} \text{ car spire fixe!}$$

par dérivation

$$\begin{aligned} \vec{E}_m &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \wedge \vec{r} + \vec{0} \\ &= -\frac{B_0}{2}|\omega|\left(\vec{i}\sin(|\omega| t) + \vec{j}\cos|\omega| t\right) \wedge \left(x\vec{i} + z\vec{k}\right) \\ &= -\frac{B_0}{2}|\omega|\left[-\vec{j}\ z\sin(|\omega| t) - \vec{k}x\cos(|\omega| t) + \vec{i}z\cos(|\omega| t)\right] \end{aligned}$$

soit

$$\vec{E}_m = -\frac{B_0}{2}|\omega|\begin{pmatrix} +z\cos|\omega| t \\ -z\sin|\omega| t \\ -x\cos|\omega| t \end{pmatrix}$$

Force electromotrice e induite dans la spire

$$\begin{aligned} e &= \int_{spire} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} \\ &= \int_{AB} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \int_{BC} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \int_{CD} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \int_{DA} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} \end{aligned}$$

détails de calcul pour le premier terme

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} &= \int_{-a}^{a} E_m^x dx \\ &= -\frac{B_0}{2} |\omega| \int_{-a}^{a} +z \cos |\omega| t dx \\ &= -\frac{B_0}{2} |\omega| \cos |\omega| t \int_{-a}^{a} (-a)\, dx \qquad \text{car sur } [AB]\,,\, z = -a \\ &= -\frac{B_0}{2} |\omega| \cos |\omega| t \times \left(-2a^2\right) \\ &= B_0 a^2 |\omega| \cos |\omega| t \end{aligned}$$

On trouve la même valeur pour les autres cotés

résultat

$$e = 4B_0 a^2 |\omega| \cos |\omega| t$$

(c) calcul de e par la loi de Faraday:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Pour cela calculons d'abord le flux de $\vec{B}$ à travers la surface (plane) $\overrightarrow{S} = 4a^2\vec{j}$ délimitée par la spire. On a:

$$\Phi = \int_S \vec{B}.\overrightarrow{ds} = \vec{B}.\overrightarrow{S} \text{ car } \vec{B} \text{ uniforme}$$

soit

$$\begin{aligned} \Phi &= \vec{B}.\overrightarrow{S} = B_0 \left(\vec{i} \cos\theta + \vec{j} \sin\theta\right).\overrightarrow{S} \\ &= 4a^2 B_0 \left(\vec{i} \cos\theta + \vec{j} \sin\theta\right).\vec{j} \\ &= -4a^2 B_0 \sin |\omega| t \end{aligned}$$

d'ou

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 4a^2 B_0 |\omega| \cos |\omega| t$$

3 fem d'une spire tournante dans $\vec{B}$ fixe

On donne:
- une spire $\mathbb{S} = [ABCD]$ tournant autour de $\Delta = \overrightarrow{OZ}$ d'un référentiel $\mathcal{R}_0\,(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec une vitesse ω comme dans la figure

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &\in \text{plan } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ d'un référentiel } \mathcal{R}\,(0, \vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_z) \\ \vec{\omega}_{\mathbb{S}/\mathcal{R}_0} &= \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \omega \vec{e}_z \\ \omega &= \dot{\theta}, \qquad \theta = \left(\widehat{\vec{e}_x, \vec{u}}\right), \qquad \theta = \omega t \end{aligned}$$

- la spire est en présence d'une induction champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$.
en présence

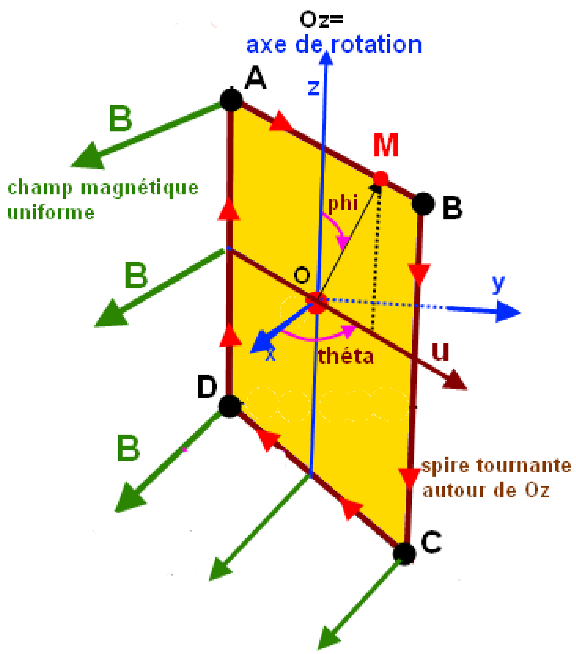

Figure 3: Spire ABCD de centre O tournante dans un champ $\vec{B}$ uniforme parallèle à $\overrightarrow{Ox}$. L'axe de rotation est $\overrightarrow{Oz}$.

3 questions

(a) composante du vecteur vitesse du point M: $\vec{v}\,(M/\mathcal{R}_0)$

- Le point M(x, y, z) appartenant au cadre se caractérise par $\vec{r}_M$ et ϕ_M. Comme le cadre tourne autour de $\overrightarrow{OZ}$, et vu que les points du cadre engendrent dans leurs rotations des cercles d'axe $\overrightarrow{OZ}$, il est convenanble d'utiliser les coordonnées sphériques.

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\phi\cos\theta \\
y &= r\sin\phi\sin\theta \\
z &= r\cos\phi
\end{aligned}
$$

avec

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}, \qquad \phi = \left(\widehat{\vec{e}_z, \vec{r}}\right)$$

noter que lorsque θ varie $\vec{r}$ et ϕ_M restent constant pour un point M donné du cadre.

- vitesse $\vec{v}\,(M/\mathcal{R}_0)$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}_{R_0} \\
\vec{v}\,(M/\mathcal{R}_0) &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\phi\sin\theta \\ r\omega\sin\phi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \\
&= \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = -\omega y\vec{e}_x + \omega x\vec{e}_y
\end{aligned}
$$

(b) champ électromoteur $\vec{E}_m$ et fem $e\,(t)$

- L'origine du mouvement des charges q du cadre $\mathbb{S}$ est une *force magnétique*

$$\vec{F}_m = qE_m$$

avec $\vec{E}_m$ (force par unité de charge) le champ électromoteur

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_m &= \frac{\vec{F}_m}{q} \\
&= \frac{\vec{v}\wedge\vec{B}}{q} \\
&= \frac{1}{q}\left(-\omega y\vec{e}_x + \omega x\vec{e}_y\right)\wedge B_0\vec{e}_x
\end{aligned}
$$

donc

$$\vec{E}_m = \frac{-\omega x B_0}{q}\vec{e}_z$$

- fem $e\,(t)$ instantanée induite par la spire

$$
\begin{aligned}
e\,(t) &= \int_{ABCD} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} \\
&= \int_{AB} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \int_{BC} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \int_{CD} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \int_{DA} \vec{E}_m.\overrightarrow{dl}
\end{aligned}
$$

soit en remplacant $\vec{E}_m = \frac{-\omega x B_0}{q}\vec{e}_z$

$$
\begin{aligned}
e\,(t) &= 0 + \int_{a}^{-a} \left(\frac{-\omega x B_0}{q}\right)_{x=x_{BC}} dz + 0 + \int_{-a}^{a} \left(\frac{-\omega x B_0}{q}\right) dz \\
&= \frac{2a\omega B_0}{q} x_{BC} - \frac{2a\omega B_0}{q} x_{DA}
\end{aligned}
$$

comme

$$
\begin{aligned}
x_{BC} &= a\cos\theta = a\cos\omega t, \\
x_{DAC} &= -a\cos\theta = -a\cos\omega t
\end{aligned}
$$

il en découle

$$
e\,(t) = \frac{4a^2\omega B_0}{q}\cos\omega t
$$

(c) fem à partir de la loi de Faraday

$$
e = -\frac{d\Phi}{dt}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \int_S \vec{B}.\overrightarrow{ds} \\
&= B_0 \int_S \vec{e}_x.\overrightarrow{ds} \\
&= B_0 \vec{e}_x.\overrightarrow{S}
\end{aligned}
$$

comme

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{S} &= -4a^2\ \vec{u} \wedge \vec{e}_z \\
&= -4a^2\left(\vec{e}_x\cos\theta + \vec{e}_y\sin\theta\right) \wedge \vec{e}_z \\
&= -4a^2\left(-\vec{e}_y\cos\theta + \vec{e}_x\sin\theta\right)
\end{aligned}
$$

et par suite

$$
B_0\vec{e}_x.\overrightarrow{S} = -4a^2 B_0 \sin\omega t
$$

et

$$
e = 4a^2\omega B_0\cos\omega t
$$

4 Exercice 4: Induction mutuelle de 2 circuits

On donne un sélénoide et une spire de même axe comme dans la figure suivante:

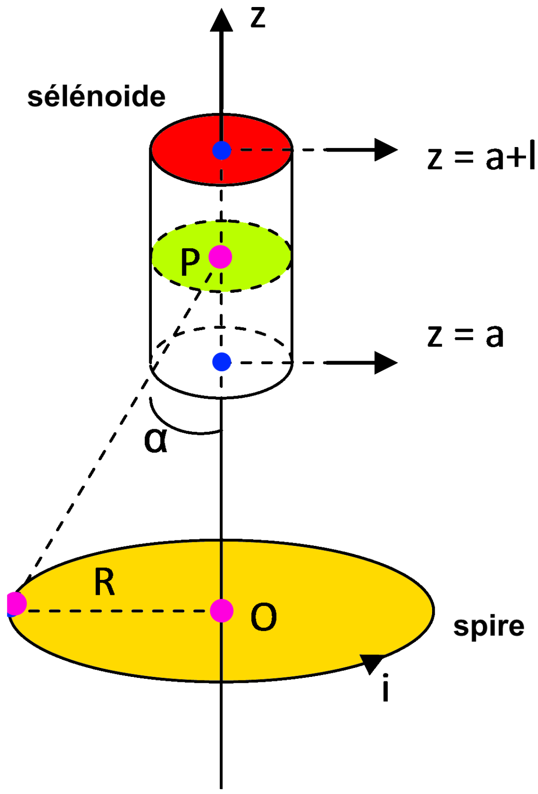

Figure 4: Sélénoide et spire

Rappel: Champ crée par une spire de rayon R su son axe $(O, \vec{e}_z)$ est

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \ \vec{e}_z$$

2 questions

(1) calcul du flux magnétique $\phi(\alpha)$ à travers une section droite quelconque du cylindre de centre P et cote z avec

$$a \leq z \leq a + l$$

Le flux magnétique $\phi(\alpha)$ à travers une section droite S du solénoïde est en général donnée par la relation intégrale suivante

$$\phi(\alpha) = \int \vec{B}.d\vec{S}$$

Cependant comme la section S du solénoïde est très petite, on peut donc supposer que

$\vec{B}$ est uniforme sur S; ce qui permat l'approximation suivante

$$\begin{aligned}\phi(\alpha) &\simeq \vec{B}.\left(\int d\vec{S}\right) \\ &= \vec{B}.\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha \ \left(\vec{e}_z.\vec{S}\right) \\ &= \frac{\mu_0 IS}{2R}\sin^3\alpha\end{aligned}$$

(2) le flux total à travars le selénoide avec les n spires est obtenu en procédant comme suit:

Pour une tranche dz du solénoïde on a le flux élémentaire $d\Phi$:

$$d\Phi = n\phi(\alpha)\,dz$$

En utilisant

$$\tan\alpha = \frac{z}{R}, \qquad dz = \frac{-R}{\sin^2\alpha}d\alpha$$

qu'on peut écrire aussi comme

$$\Phi = -\frac{nR\phi(\alpha)}{\sin^2\alpha}d\alpha$$

Vu que $\phi(\alpha) = \frac{\mu_0 IS}{2R}\sin^3\alpha$, on a

$$d\Phi = -\frac{n\mu_0 IS}{2}\sin\alpha d\alpha$$

Par integration de $z = a$ à $z = a + l$; ou de facon équivalente de $\alpha = \alpha_1$ à $\alpha = \alpha_2$ avec

$$\begin{array}{ll}\tan\alpha_1 = \frac{R}{a} & , \quad \tan\alpha_2 = \frac{R}{a+l} \\ \cos\alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}} & , \quad \cos\alpha_2 = \frac{a+l}{\sqrt{(a+l)^2+R^2}}\end{array}$$

on a:

$$\begin{aligned}\Phi &= -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{n\mu_0 IS}{2}\sin\alpha d\alpha \\ &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{n\mu_0 IS}{2}d\cos\alpha \\ &= \frac{n\mu_0 IS}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\end{aligned}$$

Le coefficient d'induction mutuelle des deux circuits est:

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{n\mu_0 S}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$