

Loi de Biot et Savart et Théorème d'Ampère

Travaux Dirigés: Semestre-S3-
Electricité 2: Groupe B- Série 2

October 11, 2011

Exercice 1: Spire circulaire

Quatre Questions

1) **Symétries:** voir le schéma¹

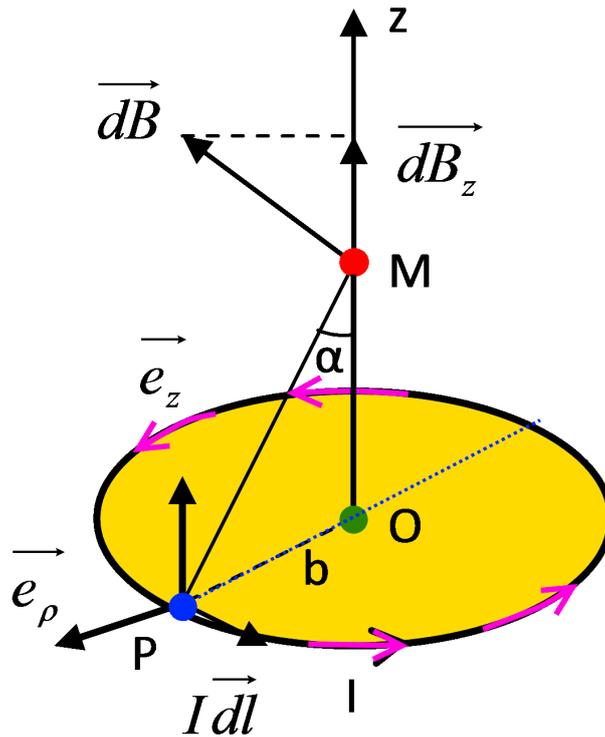


Figure 1: spire circulaire de centre O et de rayon b. $d\vec{B} \perp (\vec{Idl}, \vec{PM})$. Coordonnées $M = (\rho, \theta, z)$

Pour calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point M créée par un courant I, on utilise la loi de *Biot et Savart*. Cette loi est vectorielle; elle demande beaucoup de

¹Coordonnateur des étudiant: houssaam elmahdi, hoho_hetler@hotmail.fr

calcul. cependant s'il le conducteur a des symétries, on peut profiter de ces symétries pour simplifier les calculs.

Illustration sur le cas de la spire:

rappelons la forme générale de $\vec{B}(M)$:

$$\vec{B}(M) = \begin{pmatrix} B_\rho(M) \\ B_\theta(M) \\ B_z(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_\rho(\rho, \theta, z) \\ B_\theta(\rho, \theta, z) \\ B_z(\rho, \theta, z) \end{pmatrix}$$

c'est donc un vecteur à 3 composantes et chaque composante est une fonction de 3 variables; par conséquent beaucoup de calcul vectoriel et intégral à faire.

$\vec{B}(M)$ est un champ axial contrairement au champ électrique; il a la forme d'un produit vectoriel (une rotationnelle)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Symétries de la spire:

Des plans d'antisymétries et un axe de révolution, en effet:

- Tout plan contenant l'axe Oz est un *plan d'antisymétrie* (P.A.S.) car il change le sens du courant.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{PAS} &= (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z) \quad , \quad \mathcal{P}_{PAS} = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_z) \\ \mathcal{P}_{PAS} &= (\vec{e}_x, \vec{e}_z) \quad , \quad \mathcal{P}_{PAS} = (\vec{e}_y, \vec{e}_z) \\ (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z) \cap (\vec{e}_\theta, \vec{e}_z) &= \vec{e}_z \end{aligned}$$

Comme \vec{B} est un vecteur axial, il appartient donc à tous ces plans. Par conséquent, il est dirigé suivant l'axe Oz.

$$\vec{B}(M) = B(\rho, \theta, z) \vec{e}_z, \quad \text{en général } M = (\rho, \theta, z)$$

il y a une composante à calculer

- Le système (spire parcourue par le courant I) a une *symétrie axiale* car la seule transformation géométrique laissant le système invariant est la rotation autour de Oz.

$$\vec{B}(M) = B_z(\rho, \theta, z) \vec{e}_z = B_z(\rho, z) \vec{e}_z \Rightarrow \vec{e}_z \cdot \vec{B}(M) = B_z(\rho, z)$$

2) Loi de Biot et Savart

Cas du point $M = (0, 0, z)$: Le calcul de $\vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_z$ se fait par la loi de Biot et Savart

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{(PM)^3} = \begin{pmatrix} dB_\rho \\ dB_\theta \\ dB_z \end{pmatrix}, \quad d\vec{B} \perp (I \vec{dl}, \overrightarrow{PM})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= (-b\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \quad , \quad \sin \alpha = \frac{b}{PM} = \frac{b}{\sqrt{b^2+z^2}} \\ \overrightarrow{PM}^2 &= (b^2 + z^2) \quad , \quad \overrightarrow{PM}^3 = (b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \\ I\overrightarrow{dl} &= Ibd\theta \vec{e}_\theta \quad , \quad \frac{\sin^3 \alpha}{b^3} = \frac{1}{PM^3}\end{aligned}$$

$$I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM} = Ibd\theta \vec{e}_\theta \wedge (-b\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) = Ib^2d\theta\vec{e}_z + Ibzd\theta\vec{e}_\rho$$

$$I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 0 \\ Ibd\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ibzd\theta \\ 0 \\ Ib^2d\theta \end{pmatrix}$$

$$B_z = \int_{spire} dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ib^2d\theta}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Par intégration

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2b} \sin^3 \alpha$$

3) Cas particulier

- $M = origine O, z = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{B}(z = 0) = \frac{\mu_0 I}{2b} \vec{e}_z$$

- $M \text{ à l'infini: sur l'axe Oz: ceci implique } \alpha \rightarrow 0 \text{ et } z \rightarrow \infty:$ on a

$$\vec{B}(z = \infty) = \vec{0}.$$

3) Cas de N spires jointives identiques

Le champ B est obtenu par application du *principe de superposition*; c'est à dire que le champ total créé par la bobine est la somme des champs créés par chacune des N spires. Soit

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 NI}{2b} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

4) Circulation de B le long de Oz

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} B_z dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2 dz}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_{-\pi}^0 \left(\frac{\mu_0 I}{2b} \sin^3 \alpha \right) dz \\ \tan \alpha &= \frac{b}{z}, \quad z = b \cot \alpha, & dz = \frac{-b}{\sin^2 \alpha} d\alpha \\ \int_{-\infty}^{\infty} B_z dz &= -\frac{\mu_0 I}{2} \int_{-\pi}^0 \sin \alpha d\alpha = \mu_0 I\end{aligned}$$

Remarque: Ce résultat est conforme avec le théorème d'ampère:

On peut imaginer un contour d'Ampère C_Γ formé par l'axe des z et un demi cercle qui

relie l'extrémité à l'extrémité. D'après le théorème d'Ampère,

$$\begin{aligned} \oint_{C_T} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} B_z dz + \underbrace{\int_{\frac{1}{2} \text{ cercle}} \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0} \end{aligned}$$

Exercice 2: Conducteur cylindrique

Quatre questions

1) *Symétries du conducteur*: voir schéma pour illustration

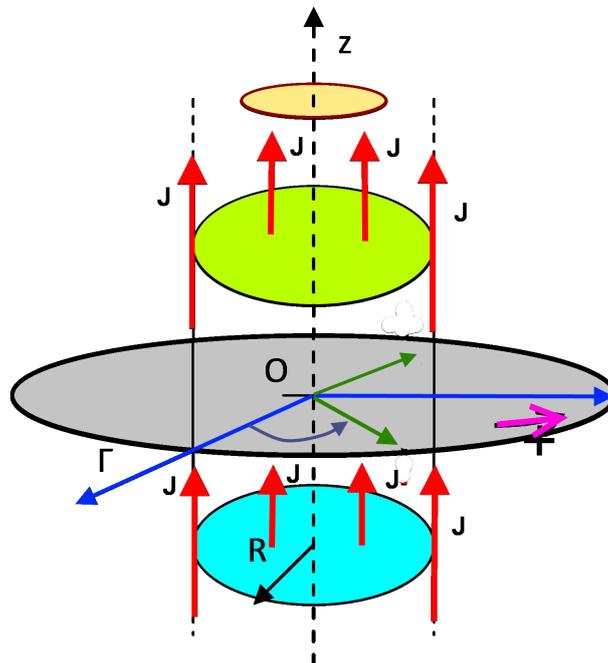


Figure 2: conducteur cylindrique parcouru par $J = j e_z$. Coordonnées $M = (\rho, \varphi, z)$. Γ est la courbe d'Ampère.

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} B_\rho(\rho, \varphi, z) \\ B_\varphi(\rho, \varphi, z) \\ B_z(\rho, \varphi, z) \end{pmatrix}$$

- Invariance du système par translation le long de l'axe Oz et par rotation autour du même axe. $\vec{B}(M)$ ne dépend donc pas des coordonnées cylindriques φ et z .

$$\vec{B}(\rho) = \begin{pmatrix} B_\rho(\rho) \\ B_\varphi(\rho) \\ B_z(\rho) \end{pmatrix}$$

- *Plan d'antisymétrie PAS*: Tout les plans

$$\mathcal{P}_{PAS} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y) \equiv (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi) \perp \vec{e}_z \quad \text{contenant } M$$

sont des PAS. Ceci implique $\vec{B}(\rho) \in \mathcal{P}_{PAS}$ et donc

$$\vec{B}(\rho) = \begin{pmatrix} B_\rho(\rho) \\ B_\varphi(\rho) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Plan de symétrie PS*: Tout les plans

$$\mathcal{P}_{PS} \equiv (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z) \perp e_\varphi \quad \text{contenant } M$$

sont des PS. Ceci implique $\vec{B}(\rho) \perp \mathcal{P}_{PS}$; alors:

$$\vec{B}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_\varphi(\rho) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de div \vec{B}

$$\text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial B_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

car $B = B(\rho)$ ne dépendant ni de φ ni de z .

2) Détermination de \vec{B}

On distingue deux cas: i) $\rho > R$ et ii) $\rho < R$

i) $\rho > R$. La courbe d'Ampère C_Γ est un cercle de rayon ρ passant par M. Comme $\rho > R$, le courant traversant S délimitée par C_Γ est

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = j\pi R^2$$

Le théorème d'ampère implique

$$\mu_0 I = \oint_{C_\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B_\varphi(\rho) d\varphi = 2\pi \rho B_\varphi$$

ou C_Γ est la courbe d'Ampère qui est un cercle de rayon ρ passant par M

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}, \quad I = j\pi R^2$$

ii) $\rho < R$. Dans ce cas seule une partie du courant contribue car

$$I_{int} = \int_{C_\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = j\pi \rho^2 = I \frac{\rho^2}{R^2}$$

le théorème d'Ampère donne

$$\begin{aligned}\mu_0 j \pi \rho^2 &= \mu_0 I \frac{\rho^2}{R^2} \\ &= \oint_{C_T} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B_\varphi (\rho d\varphi) = 2\pi \rho B_\varphi\end{aligned}$$

soit:

$$2\pi \rho B_\varphi = \mu_0 I \frac{\rho^2}{R^2} \Rightarrow B_\varphi = \mu_0 I \frac{\rho}{2\pi R^2}$$

3) Comme pour \vec{B} , d'après la symétrie du système, le potentiel vecteur \vec{A} ne dépend que de .

$$\vec{A}(\rho, \varphi, z) = \vec{A}(\rho) = \begin{pmatrix} A_\rho(\rho) \\ A_\varphi(\rho) \\ A_z(\rho) \end{pmatrix}$$

Mais contrairement à \vec{B} , le \vec{A} est un vecteur polaire; il appartient aux *Plan de Symétrie* $\mathcal{P}_{PS} \equiv (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z) \perp e_\varphi$

$$\vec{A}(\rho) = \begin{pmatrix} A_\rho(\rho) \\ 0 \\ A_z(\rho) \end{pmatrix}$$

et il est perpendiculaire aux *Plan d'Antisymétrie* $\mathcal{P}_{PAS} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y) \equiv (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, d'où

$$\vec{A}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z(\rho) \end{pmatrix}$$

La divergence de \vec{A} :

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

4) Calcul de $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} B_\rho(\rho) \\ B_\varphi(\rho) \\ B_z(\rho) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\rho \partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 - 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

soit

$$B_\varphi(\rho) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \Rightarrow A_z = -\int B_\varphi d\rho$$

Remarque: On a aussi

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \Leftrightarrow \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Calcul de A : Deux cas: $\rho > R$ et $\rho < R$

i) $\rho > R$

$$A_z(\rho) = - \int \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho + cte$$

la condition sur \vec{A} permet de déterminer la constante pour $\rho = R^+$

$$A_z(\rho = R) = 0 \Rightarrow cte = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R$$

ii) $\rho < R$

$$A_z(\rho) = - \int \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} d\rho = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \rho^2 + cte'$$

La condition sur \vec{A} permet de déterminer la constante $\rho = R^-$

$$A_z(\rho = R) = 0 \Rightarrow cte' = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} R^2$$

Exercice 3: Nappe plane de courant

On suppose que la nappe est parallèle au plan Oxy, que son épaisseur suivant Oz s'étale entre $-\frac{\varepsilon}{2} \leq z \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Voir le *schema* pour illustration

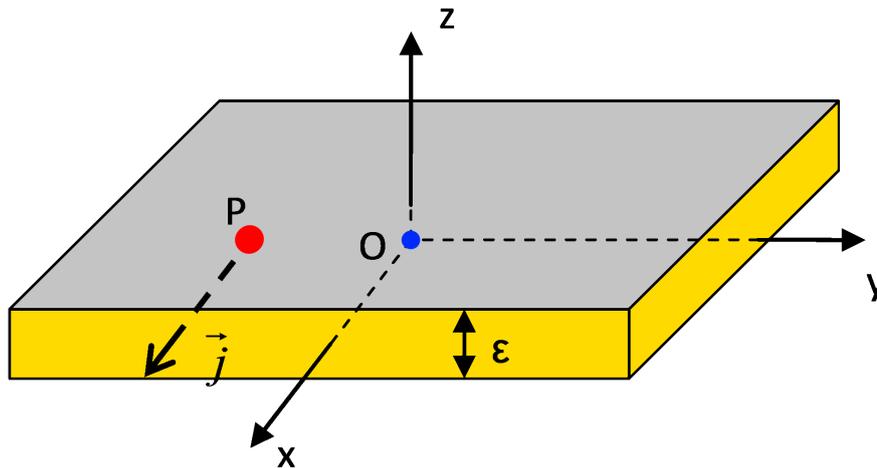


Figure 3: Nappe plane de courant $\vec{J} = j \vec{e}_x$. Coordonnées $M = (x, y, z)$.

Deux questions

Calcul de $\vec{B}(M)$ et calcul de $\vec{A}(M)$

$$\vec{B}(x, y, z) = \begin{pmatrix} B_x(x, y, z) \\ B_y(x, y, z) \\ B_z(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad \vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

- Invariance par translation suivant x et suivant y

$$\vec{B}(z) = \begin{pmatrix} B_x(z) \\ B_y(z) \\ B_z(z) \end{pmatrix}, \quad \vec{A}(z) = \begin{pmatrix} A_x(z) \\ A_y(z) \\ A_z(z) \end{pmatrix}$$

- yOz contenant M est un plan d'antisymetrie:

$$\vec{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y(z) \\ B_z(z) \end{pmatrix}, \quad \vec{A}(z) = \begin{pmatrix} A_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- xOz contenant M est un plan de symetrie:

$$\vec{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}(z) = \begin{pmatrix} A_x(z) \\ 0 \\ A_z(z) \end{pmatrix}$$

résultat

$$\vec{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}(z) = \begin{pmatrix} A_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Calcul de B: On utilise le théorème d'Ampère

$$\oint_{C_\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 JS =$$

Le contour d'Ampère C_Γ est le rectangle $ABCD$ dont le sens de parcours positif est indiqué sur la figure 4

$$\text{surface de } ABCD = L_{AB} \times L_{BC}$$

$$\text{Côté } AB=L$$

Il passe par les points M_1 et M_2 symétriques par rapport à la nappe on a:

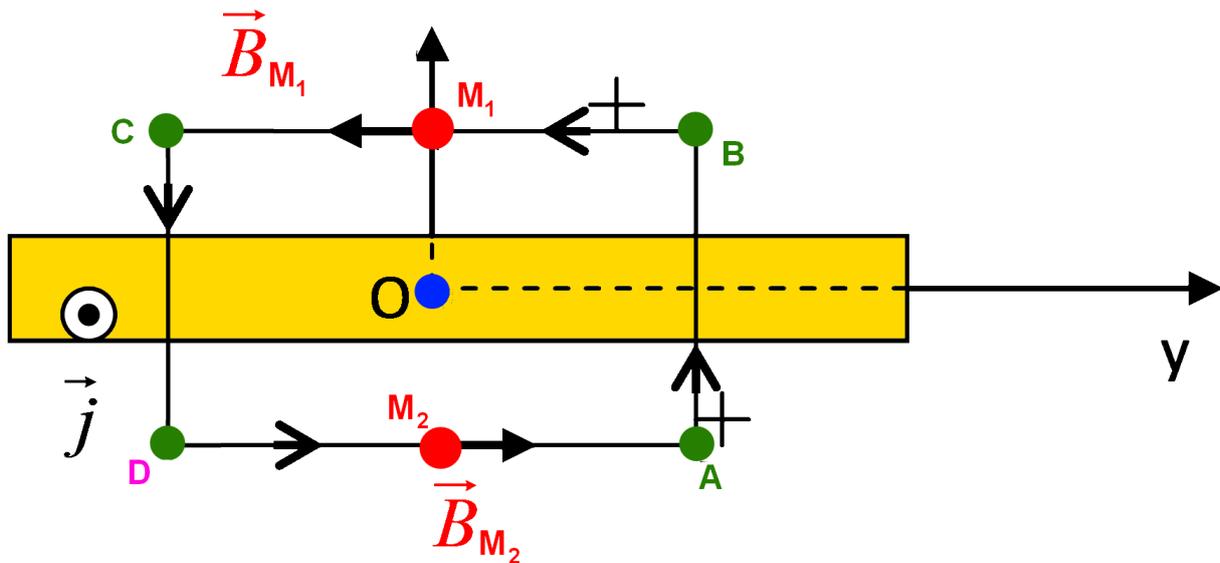


Figure 4: Contour d'Ampère.

$$\mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J \times S = \mu_0 J \times \varepsilon \times L = \mu_0 J_s \times L$$

et

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_A^B B_z \cdot dz - \int_B^C B_y \cdot dy + \int_C^D B_z \cdot dz + \int_D^A B_y \cdot dy \\ &= 0 - B_y \int_B^C dy + 0 + \int_D^A B_y \cdot dy + 0 \\ &= 2B_y L, \quad \int_D^A dy = - \int_B^C dy = L \end{aligned}$$

résultat

$$2B_y L = \mu_0 J_s \times L \Rightarrow B_y = \frac{\mu_0 J_s}{2} = \text{Cst}$$

et

$$\vec{B}(M_1) = -\frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{e}_y, \quad \vec{B}(M_2) = \frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{e}_y$$

A l'intérieur de la nappe : au point O passent 2 plans de symétrie Oxy et Oxz ; \vec{B} doit être perpendiculaire à ces 2 plans, c'est à dire

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$$

par conséquent \vec{B} en O ne peut être que nul.

\vec{B} est tangent à la nappe de courant ; il doit donc vérifier la relation de continuité

$$\vec{B}_{1T}(M) - \vec{B}_{2T}(M) = \mu_0 \vec{J}_s(M) \wedge \vec{n}_{21}$$

Dans notre cas

$$\mu_0 \vec{J}_s(M) \wedge \vec{n}_{21} = \mu_0 J_s \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = -\mu_0 J_s \vec{e}_y$$

ce qui est en accord avec

$$\vec{B}_1(M) - \vec{B}_2(M) = -\mu_0 J_s \vec{e}_y$$

2- Détermination du potentiel vecteur

on a $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ B_y(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$$

$$A_z = \int B_y dz$$

Trois cas à distinguer

i) $z > 0$: $B_y = -\frac{\mu_0 J_s}{2}$

$$A_z = -\frac{\mu_0 J_s}{2} z + cte$$

ii) $z < 0$: $B_y = \frac{\mu_0 J_s}{2}$

$$A_z = \frac{\mu_0 J_s}{2} z + cte'$$

iii) $z = 0$: $B_y = 0$

$$A_z = 0$$

la continuité de A exige que les constantes soient nulles.

Exercice 4

Données: Voir figure 5 Oz est un axe d'antisymétrie de révolution contenant $M = (0, 0, z)$; ceci implique que le champ total B est porté par l'axe Oz

$$\vec{B} = B(\rho, z) \vec{e}_z, \quad \frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$$

Calcul de B par la loi de Biot et Svart sous forme de 2 questions

Courant:

1-Le vecteur densité de courant superficiel en un point P du disque est

$$\vec{J}_s(P) = \sigma \vec{v}(P),$$

Rappelons que le vecteur densité de courant volumique s'écrit en fonction de la densité volumique des charges comme

$$\vec{J}(P) = \rho_c \vec{v}(P)$$

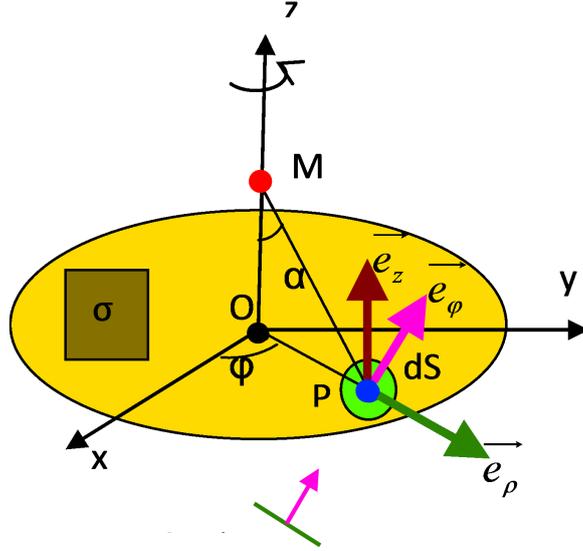


Figure 5: Distribution de charge surfacique

Le disque est animé d'un mouvement de rotation $\vec{\omega}$ autour de Oz de vitesse

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \Rightarrow \vec{v}(P) = \vec{\omega} \wedge \vec{OP} = \omega \rho \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{J}(P) &= \sigma \omega \rho \vec{e}_\varphi \\ di_s &= \vec{J} \cdot d\vec{l} = \vec{J} \cdot (d\rho \vec{e}_\varphi) = \sigma \omega \rho d\rho \end{aligned}$$

(analogue à)

$$di = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

2- En utilisant l'expression de l'induction créé par une spire en un point de son axe, on obtient : **Loi de Biot et Savart**

Cas du point $M = (0, 0, z)$: Le calcul de $\vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_z$ se fait par la loi de Biot et Savart

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{di d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3} = \begin{pmatrix} dB_\rho \\ dB_\theta \\ dB_z \end{pmatrix}, \quad d\vec{B} \perp (I d\vec{l}, \vec{PM})$$

$$\vec{PM} = (-\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z), \quad \sin \alpha = \frac{\rho}{PM} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$PM^2 = (\rho^2 + z^2), \quad PM^3 = (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$di d\vec{l} = I \rho d\varphi \vec{e}_\varphi = \sigma \omega \rho^2 d\rho d\varphi \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\sin^3 \alpha}{\rho^3} = \frac{1}{PM^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{di d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3} &= \sigma \omega \rho^2 d\rho d\varphi \frac{\sin^3 \alpha}{\rho^3} \vec{e}_\varphi \wedge (-\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) \\ &= \sigma \omega \rho^3 \frac{\sin^3 \alpha}{\rho^3} d\rho d\varphi \vec{e}_z + \sigma \omega z \rho^2 \frac{\sin^3 \alpha}{\rho^3} d\rho d\varphi \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

$$di\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma\omega\rho^2 d\rho d\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\omega z\rho^2 d\rho d\varphi \\ 0 \\ \sigma\omega\rho^3 d\rho d\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} B_z &= \int_{spire} dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma\omega\rho^3 d\rho d\varphi}{\rho^3} \sin^3 \alpha \\ &= \frac{\mu_0\omega}{2} \sigma \int \sin^3 \alpha d\rho \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = \frac{\rho}{z} \Rightarrow \rho = z \tan \alpha \Rightarrow d\rho = \frac{z d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0\omega z\sigma}{2} \int_0^{\alpha_0} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0\omega z\sigma}{2} \int \frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ &= \frac{\mu_0\omega z\sigma}{2} \int_0^{\alpha_0} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha - \frac{\mu_0\omega z\sigma}{2} \int_0^{\alpha_0} \sin \alpha d\alpha \end{aligned}$$

Par intégration

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{\mu_0\omega z\sigma}{2} \left[\frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right]_0^{\alpha_0} \\ B_z(z) &= \frac{\mu_0\omega z\sigma}{2} \left[\frac{1}{\cos \alpha_0} + \cos \alpha_0 - 2 \right] \end{aligned}$$

avec

$$\cos \alpha_0 = \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}}$$

1 Emails

sos-raja@live.fr

mohamed-elm@live.fr

flying-wing@hotmail.fr firstboy@hotmail.fr