

Nouveau

F. DANI

H. BOUKHAROU

Y. EL HYHY



Exercices et Problèmes Résolus

Mathématiques

Physique

Chimie

TOME 2

1er Cycle Universitaire
Classes Préparatoires

طريق
المعرفة

www.rapideway.org

Remerciement :

Nous vous présentons ce manuel dans sa 2ème partie, qui comprend des séries des examens de l'année précédente, accompagné par des modèles de solutions rédigées d'une façon simple et bien détaillée.

Ce support sera utile pour les étudiants de 1er année universitaire pour les filières de physique, chimie et mathématique de faculté des sciences, de sciences et technique ou de classe préparatoire aux grandes écoles.

Il contient à la fois mécanique de point, thermodynamique, chimie générale, l'analyse et l'algèbre.

C'est avec un réel plaisir que nous avons effectué ce modeste travail pour que les étudiants : puissent avoir une idée préconçue sur le niveau et le degré de difficulté des examens. Puissent bien assimiler leurs cours. Puissent avoir des supports conçus afin de bien se préparer aux examens, et d'avoir de bonnes notes par la suite.

Nous conseillons les étudiants de bien assimiler leurs cours de chaque matière et aussi de bien travailler les séries de travaux dirigés avant d'aborder la résolution des examens dont le but de bien comprendre les concepts et pour que vous puissiez reconnaître votre niveau.

Nos remerciements et notre gratitude s'adressent à tous les collègues qui ont participé à la rédaction de tous les documents, merci pour leurs bénédiction efforts, merci à : AARICHE Mohamed Chakib, AQRIM Rahma, AITSAID Abdennacer, AGHOUTANE Bilal, BEN ABOU Mustapha, BELLHAMAMA Loubna, BICHER Mona, CHAFAI Abdalilah, DAMIR Abdelilah, HARRATI Youssef, ELADRAOUI El Alami, ELBAHI Ilham, ELFERNANE Abderrazzak, ELGUAMRANI Yassine, EL HAFFAD Imane ELMOTIAA Ismail, ERRABOULI Marouane, EZZOUHIR Younes, GHOUNANE Hasna, LEGHFOUR Zakaria, LEMSAOUI Younes, SAKTINE Jalal Eddine, TAZROURATE Mohcine, ZAGMOUZI Amina, ZAGMOUZI Soumaya, ZAKOUR Rachid et d'autres qu'on n'a pas mentionné leurs noms merci

Nous tenons à remercier tous les amis qui ont contribué de loin ou de proche avec leurs encouragement pour la sortie de ce modeste effort sans oublier de remercier tous les fidèles de site RapideWay.org.



Très important :

Si vous souhaitez nous écrire, On vous propose les adresses suivantes :

- Notre adresse électronique : rapideway@gmail.com.
- Notre site web www.rapideway.org
- Notre page Facebook. www.facebook.com/rapideway

En particulier, nous remercions chaleureusement tous ceux d'entre vous qui prennent la peine de nous signaler les petites erreurs qu'ils trouvent dans nos documents.

Nous autorisons quiconque le souhaite à placer sur son site un lien vers nos documents, mais on n'autorise personne à les héberger directement. On interdit par ailleurs toute utilisation commerciale de nos documents toute modification ou reproduction sans notre accord.



Copyright © 2012 RapideWay.org

Sommaire :

Remerciement :	3
Très important :	4
Sommaire :	5
Mécanique du point matériel :	10
Contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM	10
Question de cours	10
Exercice	10
Corrigés de contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM	11
Question de cours :	11
Exercice :	11
Contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM	14
Question de cours	14
Exercice	14
Corrigé de contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM	15
Question de cours	15
Exercice :	16
Contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM	19
Question de cours	19
Exercice :	19
Corrigé de contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM	20
Question de cours	20
Exercice	20
Thermodynamique :	22
Contrôle de rattrapage Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM	22
Questions de cours	22
Problème :	22
Corrigés de rattrapage Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM	23
Questions de cours	23
Problème :	23
Contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM	26
Exercice 2 :	26

Corrigés de contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM	27
Exercice 1 :	27
Exercice 2 :	29
Contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM	31
Exercice 1 :	31
Exercice 2 :	31
Corrigé de contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM	33
Exercice 2 :	34
Contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM	36
EXERCICE	36
Corrigés de contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM	38
Exercice :	38
Contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2003-2004 FSSM	42
Questions de cours :	42
Problème : Cycle Diesel à double combustion.	42
Corrigés de contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2003-2004 FSSM	44
Questions de cours :	44
Problème : Cycle Diesel à double combustion	44
Mathématiques	46
Contrôle N : 2 Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM	46
Exercice 1 :	46
Exercice 3 :	46
Corrigés de contrôle N : 2 Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM	47
Exercice1 :	47
Exercice 2 :	47
Exercice 3 :	48
Contrôle N : 2 Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM	51
Exercice 1:	51
Exercice 2:	51
Exercice 3 :	51
Corrigé de contrôle N : 2 Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM	52
Exercice 1 :	52
Exercice 2 :	52
Exercice 3 :	52

Contrôle de rattrapage - Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM	54
Exercice 1:	54
Exercice 2:	54
Exercice 3:	54
Corrigé de contrôle de rattrapage - Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM	55
Exercice 1 :	55
Exercice 2 :	55
Exercice 4 :	56
Contrôle N° :2 - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM	58
Exercice 1:	58
Exercice 2:	58
Exercice 3:	58
Exercice 4:	58
Exercice 5:	58
Corrigé de contrôle N° :2 - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM	59
Exercice1 :	59
Exercice2:	59
Exercice3:	60
Exercice4:	61
Exercice5:	62
Contrôle N° :2 - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM	64
Exercice 1:	64
Exercice 2:	64
Exercice 3:	64
Exercice 4:	64
Corrigé de contrôle N° :2 - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM	65
Exercice 1 :	65
Exercice 2 :	66
Exercice 3 :	67
Exercice 4 :	68
Contrôle de rattrapage - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM	69
Exercice 1 :	69
Exercice 2 :	69
Exercice 3 :	69

Corrigé de contrôle de rattrapage - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM	70
Exercice1 : (4pts)	70
Exercice 2 :	71
Exercice3 :	72
Chimie Générale- Atomistique	74
Contrôle de rattrapage Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM	74
Problème I	74
Problème II :	74
Corrigé de rattrapage Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM	75
Problème I :	75
Problème II :	76
Contrôle N :2 Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM	77
Problème I :	77
Problème II :	77
Problème III :	77
Corrigé de contrôle N :2 Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM	79
Problème I:	79
Problème II :	81
Problème III:	81
Contrôle N 2 : Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2010-2011 FSSM	82
Problème I	82
Problème II :	82
Corrigé de contrôle N 2 : Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2010-2011 FSSM	84
Problème I :	84
Problème II :	86
Contrôle N 2 : Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM	88
I- Équilibres chimiques : déshydrogénation de l'éthane.	88
II- Cinétique : décomposition du pentoxyde de diazote.	88
III- Thermodynamique : combustion d'alcanes	88
Extraits d'exercices des examens de Chimie générale-Atomistique-Filière SMPC/SMA FSSM	90
Exercice 1 :	90
Exercice 2 :	90
Exercice 3 :	90
Exercice 4 :	91

Exercice 5 :	91
Exercice 6 :	92
Corrigé d'exercices des examens de chimie générale-Atomistique-Filière SMPC/SMA FSSM	93
FSSM - Extrait de Contrôle Année :Juin 1979	93
Exercice 1 :	93
FSSM - Extrait de Contrôle Année : Juin 1979	94
Exercice 2 :	94
FSSM - Extrait de Contrôle Année : Septembre 1979	94
Exercice 3:	94
FSSM - Extrait de Contrôle Année : juin 1980	97
Exercice 4:	97
FSSM – Corrigé - Extrait de Contrôle Année : Septembre 1980	100
Exercice 5	100
FSSM - Extrait de Contrôle Année: Juin 1979	104
Exercice 6	104



Mécanique du point matériel :

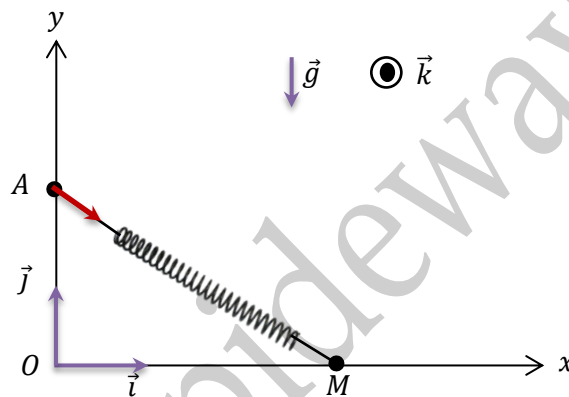
Contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM

Question de cours

Enoncer et démontrer la loi des aires (deuxième lois de Kepler).

Exercice

Un point matériel M de masse, m est attaché à l'une des extrémités d'un ressort de raideur K. L'autre extrémité A, du ressort située à la distance a de O (OA=a), est fixe sur l'axe Oy d'un référentiel galiléen R(Oxyz). M est contraint à glisser sans frottement le long de l'axe Ox et est repéré par sa position x. La longueur à vide du ressort est $l_0 = a\sqrt{2}$. Initialement (t=0), $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$. On désigne par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base orthonormée directe associée à R et $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{AM}$.

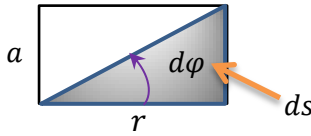
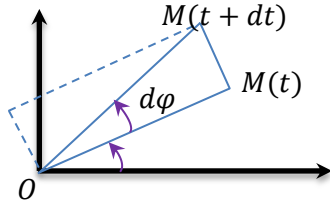


- 1) Montrer que le vecteur unitaire $\vec{u}$ est donné par $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} (x\vec{i} - a\vec{j})$
- 2) Calculer l'allongement $\Delta l = AM - l_0$, du ressort en fonction de x et a.
- 3) Représenter sur un schéma, les forces appliquées à M dans R.
- 4) Représenter les vecteurs vitesse, $\vec{V}(M/R)$ et accélération $\vec{\gamma}(M/R)$
- 5) En appliquant le PFD à M dans R :
 - a) Etablir l'équation différentielle de M et en déduire les positions d'équilibres.
 - b) Calculer la réaction $\vec{R}$, exercée par l'axe Ox sur M.
- 6) Calculer l'énergie potentielle, $\vec{E}_p(M/R)$ de m dans R.
- 7) En applique le théorème de l'énergie cinétique, retrouver l'équation différentielle régissant le mouvement de M dans R.
- 8) Le point matériel M se déplacerait-t-il, si $x_0 = x_e$ (x_e étant l'une des positions d'équilibres de M) ? Justifier votre réponse

Corrigés de contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM

Question de cours :

✗ La loi des aires :



Pour des petits angles $\tan(d\phi) = d\phi$

$$\tan(d\phi) = d\phi = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r d\phi$$

Le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales pendant des intervalles des temps égaux.

$$\frac{dS}{dt} = cst = \frac{C}{2} \quad \text{Avec } C : \text{la constante des aires (} C = r^2 \dot{\phi} \text{)}$$

$$\Rightarrow 2dS = a \cdot r \quad \text{avec } a = r d\phi \text{ lorsque on a des petits angles.}$$

$$\Rightarrow 2dS = r d\phi \cdot r \Rightarrow dS = \frac{1}{2} r^2 d\phi \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\text{On a } C = r^2 \dot{\phi} = r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad \text{Donc : } \frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} \text{ c'est la loi des aires.}$$

Exercice :

$R = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Référentiel galiléen, le point A fixé dans R,

$$\overrightarrow{OA} = a = cst \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{i}, \quad l_0 = a\sqrt{2} \text{ la longueur à vide du ressort. } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$$

1) Montrons que $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}(x\vec{i} - a\vec{j})$

On a $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$ on cherche $\overrightarrow{AM}$

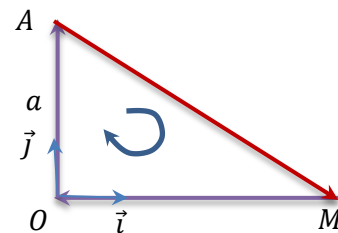
Dans le triangle AOM on a :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = -a\vec{j} + x\vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = x\vec{i} - a\vec{j}$$

Ou bien $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$ (Shale)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \text{ donc : } \overrightarrow{AM} = x\vec{i} - a\vec{j}$$



Et on a $\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{x^2 + a^2}$ alors on trouve :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}(x\vec{i} - a\vec{j})$$

2) L'allongement Δl

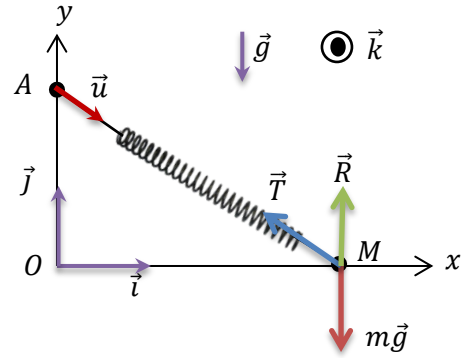
$$\text{On a } \overrightarrow{\Delta l} = \overrightarrow{AM} - \vec{l}_0 \Rightarrow \overrightarrow{\Delta l} = x\vec{i} - a\vec{j} - l_0 \vec{u}$$

$$\text{Avec : } l_0 = a\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta l} = x\vec{i} - a\vec{j} - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}(x\vec{i} - a\vec{j})$$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{\Delta l} = \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)(x\vec{i} - a\vec{j})$$

3) Les forces appliquées à M dans R

- ✓ $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{j}$
- ✓ $\vec{T} = -k\Delta l \vec{u}$
- ✓ $\vec{R} = R_y\vec{j}$ (glissement sans frottement le long de l'axe Ox $\Rightarrow R_x = 0$)



4) La vitesse $\vec{V}(M/R)$

On a $\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}|_R$ avec $\vec{OM} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{V}(M/R) = \frac{dx\vec{i}}{dt}|_R = \dot{x}\vec{i}$ ($\vec{i}$ fixe dans R)

L'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$

On a $\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}|_R \Rightarrow \vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\dot{x}\vec{i}}{dt}$ Donc : $\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{i}$

5) Le PFD dans R

a) Equation du mouvement

On a : $m\vec{\gamma}(M/R) = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow m\vec{\gamma}(M/R) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$

Alors : $m\ddot{x}\vec{i} = -mg\vec{j} + R_y\vec{j} - k\Delta l\vec{u} \Rightarrow m\ddot{x}\vec{i} = (R_y - mg)\vec{j} - k\left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)(x\vec{i} - a\vec{j})$

$\Rightarrow m\ddot{x}\vec{i} = \left\{(R_y - mg + ka\left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right))\vec{j} - xk\left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\vec{i}\right\}$

La projection selon $\vec{i}$ donne : $m\ddot{x} = -k\left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) = 0$ Equation du mouvement.

En déduire la position d'équilibre :

Le point M en équilibre $\Rightarrow x = x_e = cst$ et $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ on remplace dans l'équation du mouvement, ça donne $\Rightarrow \frac{k}{m}\left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + x^2 = 2a^2$

En fin : 2 position d'équilibre $x_e = \mp a$

b) La réaction $\vec{R}$

La projection d'équation du mouvement sur l'axe Oy donne :

$0 = R_y - mg + ka\left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) \Rightarrow R_y = mg - \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$

$\Rightarrow \vec{R} = \{mr - ka\left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\}\vec{j}$

6) L'énergie potentielle $E_p(M/R)$ de M dans R.

$$\text{On a: } dE_p(M/R) = -\delta W(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow \frac{dE_p(M/R)}{dt} = -\frac{\delta W(\vec{F}_{ext})}{dt} \Rightarrow dE_p(M/R) = -P(\vec{F}_{ext}) \cdot dt$$

Avec:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \mathcal{P}(\vec{P}/R) &= \vec{P} \cdot \vec{V}(M/R) = -mg\vec{j} \cdot \dot{x}\vec{i} = 0 \\ \blacksquare \quad \mathcal{P}(\vec{R}/R) &= \vec{R}_y \cdot \vec{V}(M/R) = R_y\vec{j} \cdot \dot{x}\vec{i} = 0 \\ \blacksquare \quad \mathcal{P}(\vec{T}/R) &= \vec{T} \cdot \vec{V}(M/R) = -k \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) (x\vec{i} - a\vec{j}) \cdot \dot{x}\vec{i} \\ \blacksquare \quad \Rightarrow \mathcal{P}(\vec{T}/R) &= -k\dot{x} \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dE_p(M/R) = -k\dot{x} \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) dt \quad \text{Avec : } (\dot{x}dt = dx)$$

$$\Rightarrow dE_p(M/R) = -k \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_p(M/R) &= \int -kdx + \int \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = -kx + cst + a\sqrt{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ &= -kx + a\sqrt{2} \operatorname{argch}\left(\frac{x}{a}\right) + cst' \end{aligned}$$

7) Le théorème de l'énergie cinétique :

■ Equation différentielle du mouvement

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{dE_p(M/R)}{dt} &= \mathcal{P}(\vec{F}/R) \quad \text{Et : } E_c(M/R) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/R) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ \Rightarrow \frac{dE_c(M/R)}{dt} &= 2 \cdot \frac{1}{2}m\ddot{x} \cdot \dot{x} = m\ddot{x}\dot{x} \end{aligned}$$

$$\text{Et : } \mathcal{P}(\vec{T}/R) = -k\dot{x} \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$\text{Donc : } m\ddot{x}\dot{x} = -k\dot{x} \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) = 0$$

8) On cherche la position d'équilibre :

Le point M admet une énergie potentielle $E_p(M/R)$ pour trouver les positions d'équilibre on dérive $E_p(M/R)$ par rapport à x, alors :

$$\text{On a } E_p(M/R) = -kx + a\sqrt{2} \operatorname{argch}\left(\frac{x}{a}\right) + cst' \Rightarrow \frac{E_p(M/R)}{dx} = -k + a\sqrt{2} \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + 0$$

$$x_e \text{ Position d'équilibre} \Rightarrow \frac{E_p(M/R)}{dx} \Big|_{x=x_e} = 0 \Rightarrow -k + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x_e}{a}\right)^2}} = 0 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x_e}{a}\right)^2}}$$

En fin: $x_e = a\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{k} - 1}$, on a a=constant et K constante $\Rightarrow x_e = cst$ donc, si $x = x_e = cst$ le point M ne se déplace pas

Contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM

Question de cours

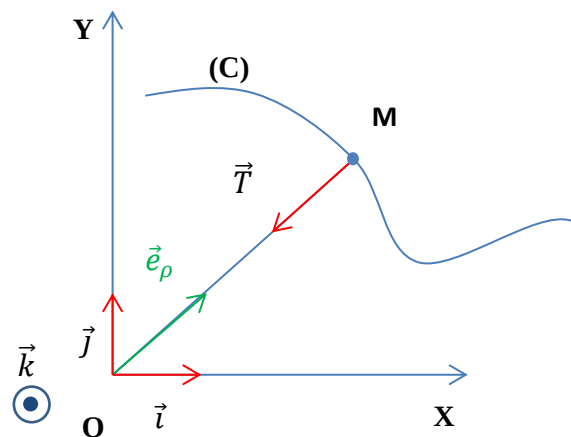
- 1) Soit M un point matériel de masse m soumis à l'action d'une force résultante $\vec{F}$
 - a) Enoncer et démontrer le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen R.
 - b) Que devient ce théorème dans un référentiel non galiléen R_1
- 2) Dans un référentiel galiléen $R(O, XYZ)$, un point matériel de masse m, repéré par ses coordonnées polaires ρ et φ , est soumis à l'action d'une force centrale $\vec{f}$ de centre O.
 - a) Montrer que le moment cinétique en O est constant, $\vec{\sigma}_O(M/R) = \vec{C}t\vec{e}$.
 - b) Avec $u = \frac{1}{\rho}$ et $C = \rho^2 \dot{\varphi}$, montrer que $V^2 = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right]$, (V étant le module de la vitesse du point M dans R).

Exercice

Dans tout le problème, $R(O, XYZ)$ est un référentiel non galiléen auquel est attachée la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point de masse m est susceptible de glisser sans frottement sur un plan horizontal sous l'action de trois forces : le poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{F}$ et une force $\vec{T} = -T\vec{e}_\rho$ (voir figure). Le point M est repéré par la distance ρ telle que : $\rho = a - bt$ avec a et b deux constantes positives. A l'instant $t = 0$, le point M a été lancé d'un point M_0 de l'axe Ox avec la vitesse $\vec{V}_0(M/R)$. A l'instant t, Le point M est repéré par les coordonnées $\rho = \|\vec{OM}\|$ et $\varphi = (\vec{i}, \vec{e}_\rho)$. Par la suite, on pose : $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ et $\varphi_0 = \varphi(t = 0)$.

- 1) Ecrire les expressions des forces appliquées à M. faire une représentation sur une figure.
- 2) Ecrire le PFD dans R. en déduire l'accélération du point M, $\vec{\gamma}(M/R)$ en fonction de $\vec{T}$ et m.
- 3) Calculer la vitesse du point M dans R. en déduire la valeur de la vitesse $\vec{V}_0(M/R)$. A $t = 0$.
- 4) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O, montrer que $\vec{\sigma}_O(M/R)$ est constant. En déduire que $\dot{\varphi} = \frac{a^2 \varphi_0}{(a-bt)^2}$.
- 5) En appliquant le théorème d'énergie cinétique, $t=0$ et t est donné par :

$$W(\vec{T}/R) = \frac{ma^2 \dot{\varphi}_0^2}{2} \left(\frac{a^2}{(a-bt)^2} - 1 \right).$$



Corrigé de contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM

Question de cours

1)

a) Théorème de l'énergie cinétique :

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants t_1 et t_2 égale au travail de la force $\vec{F}$ appliqué à ce point.

$$E_{C_2}(M/R) - E_{C_1}(M/R) = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}/R) \text{ ou } dE_c(M/R) = \delta W(\vec{F}/R)$$

Démonstration :

$$\text{On a } dE_c(M/R) = \frac{1}{2} m \times \vec{V}^2(M/R)$$

$$\left. \frac{dE_c}{dt}(M/R) \right|_R = \frac{1}{2} m \times \vec{V}^2(M/R) \frac{d\vec{V}}{dt}(M/R) \Big|_R = m \vec{V}(M/R) \cdot \vec{\gamma}(M/R)$$

D'après le PFD dans R on a $m\vec{\gamma}(M/R) = \vec{F}(M/R)$

$$\Rightarrow \left. \frac{dE_c}{dt}(M/R) \right|_R = \vec{F}(M/R) \cdot \vec{V}(M/R) \cdot dt$$

$$\text{On a } \vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Rightarrow dE_c(M/R) = \vec{F}(M/R) \cdot d\vec{OM}$$

$$dE_c(M/R) = dW(\vec{F}/R)$$

En intégrant entre deux instant t_1 et t_2 on trouve $E_{C_2}(M/R) - E_{C_1}(M/R) = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}/R)$

b) Dans un référentiel non galiléen, ce théorème s'écrit $dE_c(M/R) = \delta W(\vec{F} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ie}/R_1)$

R_1 : référentiel non galiléen

$\vec{F}_{ic}$: force d'inertie de Coriolis

$\vec{F}_{ie}$: force d'inertie d'entraînement

2)

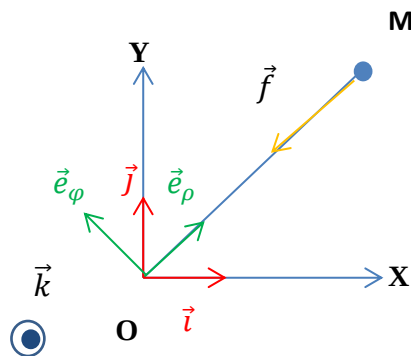
$$\text{a) On a } \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f}$$

$$= \rho \vec{e}_\rho \wedge (-f \cdot \vec{e}_\rho) = \vec{0}$$

$$\text{Avec } (\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\rho) = \vec{0}$$

Et le théorème du moment cinétique :

$$\left. \frac{d\sigma_o(M/R)}{dt} \right|_R = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{f}) = \vec{0}$$



$\Rightarrow \sigma_0(M/R) = \overline{cst}$ et donc le moment cinétique en O est constante

b) On a $\vec{V}(M/R) = \frac{d\overline{OM}}{dt} \Big|_R$, avec $\overline{OM} = \rho \vec{e}_\rho$

$$\vec{V}(M/R) = \vec{V} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho) \Big|_R = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

$$V^2 = \|\vec{V}\|^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho \frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

On a $c = \rho^2 \dot{\varphi} = \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{\rho^2} \Rightarrow V^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \frac{c^2}{\rho^4}$ Avec $\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{c}{\rho^2}$

$$\Rightarrow V^2 = C^2 \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \frac{c}{\rho^2}$$

On pose $u = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} \Rightarrow V^2 = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right]$

Exercice :

$R(o, x, y, z) \rightarrow (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Référentiel galiléen

M glisse sans frottement sur un plan horizontal (oxy)

$\overline{OM} = \rho \vec{e}_\rho = (a - bt) \vec{e}_\rho$ Avec a et b sont des constantes

1) les expressions des forces appliquées à M :

- le poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$
- la réaction $\vec{R} = R_z\vec{k}$ (M glisse sans frottement sur un plan horizontal (oxy) donc $R_x = R_y = 0$)
- la force $\vec{T} = -T\vec{e}_\rho$

2) le PFD dans le référentiel R

On a $m\vec{\gamma}(M) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}(M)$ puisque R est galiléen, donc

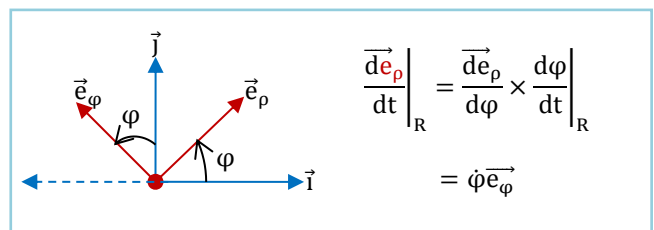
$$m\vec{\gamma}(M/R) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = -mg\vec{k} - T\vec{e}_\rho + R_z\vec{k}$$

on a un mouvement plane (dans le plan oxy), alors $\vec{\gamma} = \gamma_\rho \vec{e}_\rho + \gamma_\varphi \vec{e}_\varphi$ et par conséquent $\vec{\gamma}$ ne dépend pas de $\vec{k} \Rightarrow -mg + R_z = 0$

et $m\vec{\gamma}(M/R) = -T\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{\gamma}(M/R) = -\frac{T}{m} \vec{e}_\rho$

3) la vitesse du point M

on a $\vec{V}(M/R) = \frac{d\overline{OM}}{dt} \Big|_R$, $\overline{OM} = \rho \vec{e}_\rho$



$$\vec{V}(M/R) = \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho) \Big|_R = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

Et $a = a - bt$, a et b sont des constantes

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi = -b \vec{e}_\rho + (a - bt) \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

- la vitesse $\vec{V}_0(M/R)$ à $t = 0$

À $t = 0 \Rightarrow a - bt = 0$ et $\dot{\phi}(t = 0) = \dot{\phi}_0$

$$\vec{V}_0(M/R) = -b \vec{e}_\rho + a \dot{\phi}_0 \vec{e}_\phi$$

4) le théorème de moment cinétique :

$$\text{On a } \frac{d\sigma_0(M/R)}{dt} \Big|_R = \vec{M}_O(\vec{P} + \vec{T} + \vec{R})$$

avec $\sigma_0(M/R) = OM^\rightarrow$

$$\text{Avec } \vec{\sigma}_0(M/R) = \vec{OM} \wedge m \vec{V}(M/R) = \rho \vec{e}_\rho \wedge m(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi) = m\rho^2 \dot{\phi} \vec{k}$$

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{OM} \wedge R_z \vec{k} = \rho \vec{e}_\rho \wedge R_z \vec{k} = -\rho R_z \vec{e}_\phi$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge m \vec{g} = \rho \vec{e}_\rho \wedge -mg \vec{k} = \rho mg \vec{e}_\phi$$

$$\vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \rho \vec{e}_\rho \wedge -T \vec{e}_\rho = \vec{0}$$

$$\text{On a } -mg + R_z = 0 \Rightarrow \rho(-mg + R_z) = 0$$

$$\vec{M}_O(\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}) = \rho mg \vec{e}_\phi + \vec{0} - \rho R_z \vec{e}_\phi = \rho(-mg + R_z) \vec{e}_\phi = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_0(M/R)}{dt} \Big|_R = \vec{0} \text{ d'où } \vec{\sigma}_0(M/R) = \vec{cst}$$

en déduire $\dot{\phi}$

On a $\vec{\sigma}_0(M/R) = m\rho^2 \dot{\phi} \vec{k} = \vec{cst}$ et comme $\vec{\sigma}_0(M/R) = \vec{cst}$ on utilise les condition initial en $t = 0$

on a $t = 0 \Rightarrow \rho = a - bt = 0 \Rightarrow \rho(t = 0) = a \Rightarrow \rho^2(t = 0) = a^2$ et $\dot{\phi}(t = 0) = \dot{\phi}_0$

$$\sigma_0(M/R) = m\rho^2(t = 0)\dot{\phi}(t = 0) = ma^2\dot{\phi}_0$$

$$\text{D'autre part } \sigma_0(M/R) = m\rho^2\dot{\phi} = m(a - bt)^2\dot{\phi}$$

$$m(a - bt)^2\dot{\phi} = ma^2\dot{\phi}_0$$

$$\dot{\phi} = \frac{a^2}{(a - bt)^2} \dot{\phi}_0$$

5) théorème d'énergie cinétique

$$\text{on a } dE_c(M/R) = \delta W(\vec{F}/R) = \delta W(\vec{P} + \vec{T} + \vec{R})$$

$$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = -mg \vec{k} \cdot \vec{V}(M/R) \cdot dt \quad \text{avec } \vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$\delta W(\vec{P}) = -mg \vec{k} \cdot (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi) = -mg \dot{\rho} (\vec{k} \cdot \vec{e}_\rho) - mg \rho \dot{\phi} (\vec{k} \cdot \vec{e}_\phi) = \vec{0}$$

$$\delta W(\vec{R}) = \vec{R} \cdot d\vec{OM} = \vec{R} \cdot \vec{V}(M/R) \cdot dt = R_z \vec{k} \cdot (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi)$$

$$\delta W(\vec{R}) = R_z \dot{\rho} (\vec{k} \cdot \vec{e}_\rho) + R_z \rho \dot{\phi} (\vec{k} \cdot \vec{e}_\phi) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow dE_c(M/R) = \delta W(\vec{T})$$

$$E_{C_t}(M/R) - E_{C_{t=0}}(M/R) = W_{0 \rightarrow t}(\vec{F}/R) = W(\vec{T}/R)$$

$$E_{C_t}(M/R) = \frac{1}{2} m \|\vec{V}^2(M/R)\| = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2)$$

$$\text{Avec } \vec{V}(M/R) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

$$\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2}$$

$$\|\vec{V}^2(M/R)\| = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{Et } \rho &= a - bt \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = -b \\
 \Rightarrow E_{C_t}(M/R) &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m((-b)^2 + (a - bt)^2\dot{\varphi}^2) \\
 E_{C_{t=0}}(M/R) &= \frac{1}{2}m\vec{V}_{t=0}^2(M/R) = \frac{1}{2}m\vec{V}_0^2(M/R) \\
 \text{On a } \vec{V}_0^2(M/R) &= \vec{V}_0(M/R) = -b\vec{e}_\rho + a\dot{\varphi}_0\vec{e}_\varphi \\
 \vec{V}_0^2(M/R) &= \|\vec{V}_0(M/R)\| = \left(\sqrt{(-b)^2 + (a\dot{\varphi}_0)^2}\right)^2 = b^2 + a^2\dot{\varphi}_0^2 \\
 \Rightarrow E_{C_t}(M/R) - E_{C_{t=0}}(M/R) &= W(\vec{T}/R) \\
 \frac{1}{2}m(b^2 + (a - bt)^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}m(b^2 + a^2\dot{\varphi}_0^2) &= W(\vec{T}/R) \\
 \frac{1}{2}m[\dot{\varphi}^2 + (a - bt)^2\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 - a^2\dot{\varphi}_0^2] &= W(\vec{T}/R) \\
 \frac{1}{2}m\left[\frac{a^4}{(a - bt)^4}\dot{\varphi}_0^2 - \dot{\varphi}_0^2\right] &= W(\vec{T}/R) \\
 W(\vec{T}/R) &= \frac{ma^2\dot{\varphi}_0^2}{2}\left[\frac{a^2}{(a - bt)^2} - 1\right]
 \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \dot{\varphi} = \frac{a^2}{(a - bt)^2} \dot{\varphi}_0$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{a^4}{(a - bt)^4} \dot{\varphi}_0^2$$

Contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM

Question de cours

Enoncer (sans démontrer) le théorème de l'énergie mécanique. Dans quels cas y'a-t-il conservation de l'énergie mécanique ? Donner un exemple de mouvement ou l'énergie mécanique conservée au cours du mouvement. Donner un exemple de mouvement ou l'énergie mécanique est non conservée au cours du mouvement.

Exercice :

Un point matériel M de masse m est astreint à se déplacer sans frottement sur la surface intérieure S d'une demi-sphère creuse de centre O et de rayon r_0 . Cette surface tourne à vitesse angulaire constante ω autour de son axe vertical Oz_0 (figure).

On désigne par $\vec{N}$ la réaction qu'exerce la surface S sur M et par s l'intensité du champ de pesanteur.

On donne : $R_0(Ox_0y_0z_0)$ référentiel terrestre supposé galiléen, $R(Oxyz_0)$ référentiel, lié à la surface S, de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$ et $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}_0$.

- 1) Donner l'expression du vecteur de rotation, $\vec{\Omega}(R/R_0)$, du référentiel R par rapport à R_0 .
- 2) Quelles sont les forces appliquées à M dans R ?
- 3) Ecrire vectoriellement la loi fondamentale de la dynamique pour M dans son mouvement par rapport à R.
- 4) Justifier l'écriture : $\vec{N} = -\vec{N} \frac{\vec{r}}{r_0} = \vec{OM}$ et N est le module de la réaction $\vec{N}$.
- 5) Ecrire la relation vectorielle de la question 3- dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$. En déduire les équations différentielles auxquelles satisfont x, y et z.
- 6) Quelle est en fonction de Z? on prendra l'origine de l'énergie potentiel à $z = 0$. On L'énergie potentiel de pesanteur de M désignera par $E_{p1}(z)$ cette énergie.
- 7) L'énergie potentiel totale de M dans R est $E_p(M/R) = E_{p1}(z) + E_{p2}(z)$ ou $E_{p2}(z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$
 - a) Quelles sont les forces appliquées à M dans R qui ne travaillent pas ? justifiez votre réponse.
 - b) En déduire la force dérive de l'énergie potentielle $E_{p2}(z)$.
- 8) Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_m(M/R)$?
- 9) $E_m(M/R)$ est-elle conservée au cours du mouvement ?justifier votre réponse.
- 10) Ecrire l'équation vectorielle traduisant l'équilibre de M par rapport a R, en déduire le module N de la réaction $\vec{N}$ en fonction de m, g, r_0 , ω et z.

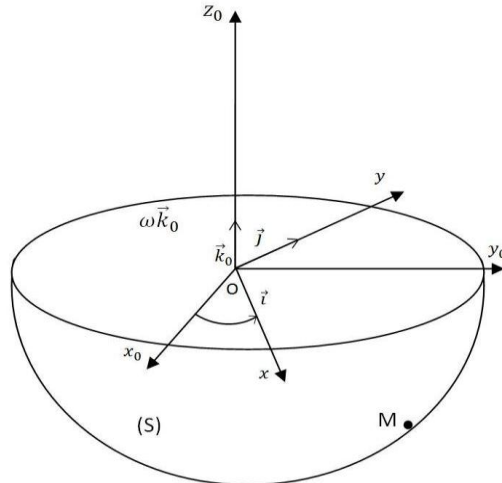


Figure : 1

Corrigé de contrôle N : 2 Mécanique de point Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM

Question de cours

Théorème de l'énergie mécanique :

$$dE_m = \sum \delta w(\vec{F}_{\text{non conservatives}}) \rightarrow \Delta E_m = \sum w(\vec{F}_{\text{non conservatives}})$$

Il y a conservation de l'énergie mécanique si toutes les forces qui travail sont conservatives

Exemple : $E_m = \text{cte}$ { pendule simple
force centrale

E_m n'est pas conservé : $E_m \neq \text{cte} \rightarrow \text{mouvement avec frottement}$

Exercice

$R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ repère absolue. Et $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$ repère relatif.

- 1) Vecteur rotation $\vec{\Omega}(R/R_0) = \omega \vec{k}_0$
- 2) Force appliquées à M dans R :

$\vec{P}$ Poids du point matériel, $\vec{N}$ Réaction, $\vec{F}_{ie}$ Force d'inertie d'entraînement et $\vec{F}_{ic}$ Force d'inertie de Coriolis

- 3) La loi fondamentale de la dynamique pour M dans son mouvement par rapport à R :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m \vec{\gamma}(M/R)$$

- 4) Le mouvement est sans frottement $\rightarrow \vec{N}$ est radiale

$$\vec{N} = -N \frac{\vec{r}}{r_0} \text{ avec } \vec{r} = \overrightarrow{OM} = r_0 \vec{e}_r \Rightarrow \vec{N} = -N \vec{e}_r$$

- 11) la loi fondamentale de la dynamique pour M dans son mouvement par rapport à R

$$\text{dans la base } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0). \quad -mg\vec{k}_0 - \frac{N}{r_0} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}_0) - m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) - m 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(M/R) = m \vec{\gamma}(M/R)$$

$$\blacksquare \quad \vec{V}(M/R) = \frac{d}{dt/R} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}_0) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}_0 \text{ Alors : } \vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}_0$$

$$\blacksquare \quad \vec{\gamma}_c = \omega \vec{k}_0 \wedge [\omega \vec{k}_0 \wedge (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}_0)]$$

$$\blacksquare \quad \vec{\gamma}_e = -\omega^2 (x\vec{i} - y\vec{j})$$

$$\blacksquare \quad \vec{\gamma}_c = 2\omega (\dot{x}\vec{i} - \dot{y}\vec{j})$$

$$PFD \Leftrightarrow -mg\vec{k}_0 - \frac{N}{r_0} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}_0) + m\omega^2(x\vec{i} + y\vec{j}) + 2\omega(\dot{y}\vec{i} - \dot{x}\vec{j}) = m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}_0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{N}{r_0}x + m\omega^2x + 2m\omega\dot{y} \right] \vec{i} + \left[-\frac{N}{r_0}y + m\omega^2y - 2m\omega\dot{x} \right] \vec{j} - \left[mg + \frac{N}{r_0}z \right] \vec{k}_0 = m[\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}_0]$$

Projection sur $\vec{i}$:

$$\begin{cases} -\frac{N}{r_0}x + m\omega^2x + 2m\omega\dot{y} = m\ddot{x} \\ -\frac{N}{r_0}y + m\omega^2y - 2m\omega\dot{x} = m\ddot{y} \\ -(mg + \frac{N}{r_0}z) = m\ddot{z} \end{cases} \quad \text{Equation différentiel de mouvement}$$

12) L'énergie potentiel de pesanteur de M :

$$13) \quad dE_{p1} = -\delta w(\vec{P}) = -\vec{P} \cdot \vec{V} dt = mg\vec{k}_0 [\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}_0] dt$$

$$\Leftrightarrow dE_{p1} = mgdz \Leftrightarrow E_{p1} = mgz + cte$$

$$\text{Pour } E_{p1}(O) = 0 \Leftrightarrow cte = 0 \text{ donc : } E_{p1} = mgz$$

$$14) E_p = E_{p1} + E_{p2} \text{ avec } E_{p2} = \frac{1}{2}m\omega^2z^2$$

a) Les forces qui ne travaillent pas :

$$\blacksquare \quad \vec{N} = -N \frac{\vec{r}}{r_0} \perp \text{ au déplacement.}$$

$$\blacksquare \quad \vec{F}_{ic} = 2m[\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(M/R)] \perp \vec{V}(M/R)$$

b) E_{p2} est l'énergie potentielle relative à $\vec{F}_{ie}$

$$15) \text{ L'énergie mécanique de point M : } E_m = E_c + E_{p1} + E_{p2}$$

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz + \frac{1}{2}m\omega^2z^2$$

Toutes les forces qui travaillent sont conservatives $\Leftrightarrow$ L'énergie mécanique est conservée

$$16) \text{ Les équations qui traduisent l'équilibre } \Leftrightarrow \sum \vec{F} = 0 \text{ Et } \vec{V} = 0$$

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_{ie} = 0 \quad (\vec{f}_{ie} = 0 \text{ car } \vec{V} = 0)$$

$$N^2 = m^2g^2 + m^2\omega^4[x^2 + y^2] = m^2g^2 + m^2\omega^4[r_0^2 - z^2]$$

$$(r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2) \text{ D'où } N = \sqrt{g^2 + \omega^2(r_0^2 - z^2)}$$

Thermodynamique :

Contrôle de rattrapage Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM

N.B. : « Donner d'abord la réponse littérale à chaque question et encadrer là, avant de donner la réponse numérique, qui sera encadrée. »

« Rappel : $\delta Q = \lambda \cdot dP + \mu dV$ avec $\lambda = Cv(\frac{\partial T}{\partial P})_v$ et $\mu = Cp(\frac{\partial T}{\partial V})_p$. »

Questions de cours :

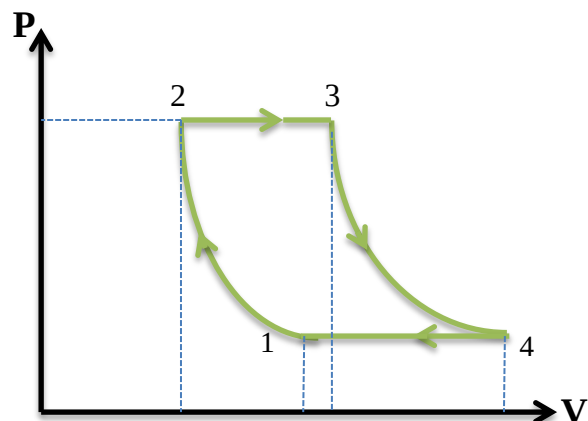
- 1) Donner les équations des transformations réversibles suivantes en variables T-S et les représenter dans le diagramme entropique (T-S)
 - a) Isotherme.
 - b) Isentropique.
 - c) Isobare d'un gaz parfait (pour retrouver l'équation de cette transformation calculer ΔS).
- 2) Pour quelle transformation on peut écrire $PV^\gamma = \text{constante}$. Démontrer cette relation.

Problème :

Le cycle d'Ericsson est constitué de deux isothermes et de deux isobares. On suppose que toutes les transformations du cycle sont réversibles. Ce cycle est représenté sur la figure ci-dessous. Il est décrit par une masse $m=1\text{kg}$ d'air supposé gaz parfait. La pression au début de la compression est $P_1=120\text{kPa}$ et le taux de compression est $a = \frac{V_1}{V_2} = 5,5$. Les températures des deux isothermes sont $T_1=27^\circ\text{C}$ et $T_3=627^\circ\text{C}$.

Données de l'air ; $M=29\text{g/mole}$, $R=8,3\text{ J/(mole.K)}$ et $\gamma=1,4$.

- 1) Sans faire de calcul, donner le signe du travail de ce cycle W_{cycle} . Justifier votre réponse.
- 2) Ce cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifier.
- 3) Calculer les pressions, températures et volumes de l'air aux points 1,2,3 et 4 du cycle.
- 4) Calculer les travaux et chaleurs échangés au cours de chaque transformation du cycle.
- 5) Donner les valeurs des chaleurs reçues Q_c et fournies Q_f par la masse d'air qui décrit le cycle.
- 6) Calculer le rendement η de cycle.
- 7) Calculer le rendement du cycle de Carnot η_{carnot} qui fonctionne avec les sources de chaleurs T_1 et T_3 . Comparer ce rendement à . Expliquer



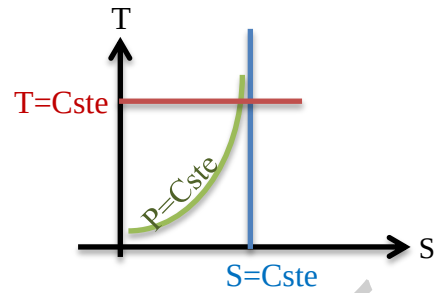
Cycle d'Ericsson Théorique

Corrigés de rattrapage Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM

Questions de cours

1)

- | | |
|--------------------------------------|------------------|
| a) Isotherme $\Rightarrow T=cste$ | } représentation |
| b) Isentropique $\Rightarrow S=cste$ | |
| c) Isobare $\Rightarrow P=cste$ | |



$$dS = \frac{\delta Q_{rév}}{T} = \frac{C_p dT + h dP}{T} \quad (P=cste \Rightarrow dP=0)$$

$$D'où : \quad \Delta S = \int_{T_0}^T \frac{\delta Q_{rév}}{T} = \int_{T_0}^T C_p dT = C_p \ln \frac{T}{T_0}$$

$$Donc : \quad T = T_0 e^{\frac{(S-S_0)}{C_p}}$$

2) $PV^\gamma = cste$ est l'équation d'une adiabatique réversible d'un gaz parfait.

On a transformation adiabatique $\Rightarrow \delta Q = 0$

$$\delta Q = \lambda dP + \mu dV = 0 \quad \text{gaz parfait}$$

- $\lambda = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_v = C_v \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{PV}{nR} \right)_v = \frac{C_v V}{nR}$
- $\mu = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = C_p \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{PV}{nR} \right)_p = \frac{C_p P}{nR}$

$$D'où : \quad \delta Q = \frac{C_v V}{nR} dP + \frac{C_p P}{nR} dV = 0$$

On simplifie par nR et on divise par PV on trouve :

$$C_v \frac{dP}{P} + C_p \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{C_p}{C_v} \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \ln P + \gamma \ln V = 0 \Rightarrow \ln PV^\gamma = 0$$

$$Donc : \quad PV^\gamma = \text{constante}$$

Problème :

- 1) D'après le sens du cycle décrite dans le sens horaire $W_{cycle} < 0$ C'est un cycle moteur.
- 2) On a $W_{cycle} < 0 \rightarrow$ c'est un cycle moteur (le cycle décrit dans le sens horaire)
- 3) cherchons les pressions, températures et volumes de l'air aux points 1,2,3 et 4 du cycle.

✗ Point 1 : P_1 , T_1 et V_1

On $P_1 = 120 \text{ kPa}$, $T_1 = 300 \text{ K}$ (27°)

$$\blacksquare V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{mRT_1}{MP_1} = 0,71 \text{ m}^3$$

✗ Point 2 : P_2 , T_2 et V_2

$$\blacksquare \{ \text{point 1} \rightarrow \text{point 2} \} \rightarrow \text{isotherme} \Rightarrow T_2 = T_1 = 300 \text{ K}$$

■ On a $P_1 V_1 = P_2 V_2 = n r T \rightarrow P_2 = \frac{V_1}{V_2} P_1$

Donc : $P_2 = a P_1 = 660 \text{ KPa}$ et $V_2 = \frac{V_1}{a} = 0,13 \text{ m}^3$

✗ Point 3 : P_3 , T_3 et V_3

■ {point 2 $\rightarrow$ point 3} $\rightarrow$ Isobare

■ On trouve $P_3 = P_2 = 660 \text{ KPa}$ avec $T_3 = 627^\circ \text{C} = 900 \text{ K}$

■ $V_3 = \frac{n R T_3}{P_3} = \frac{m R T_3}{M P_3} \rightarrow V_3 = 0,39 \text{ m}^3$

✗ Point 4 : P_4 , T_4 et V_4

■ {point 3 $\rightarrow$ point 4} $\rightarrow$ isotherme $\Rightarrow T_3 = T_4 = 900 \text{ K}$

■ {point 4 $\rightarrow$ point 1} $\rightarrow$ isobare $\Rightarrow P_4 = P_1 = 120 \text{ KPa}$

■ Et : $V_4 = \frac{n R T_4}{P_4} = \frac{m R T_4}{M P_4} \rightarrow V_4 = 2,15 \text{ m}^3$

4) Cherchons les travaux et chaleurs échangés au cours de chaque transformation du cycle.

✗ Calcul de W, Q

Transformation réversible $\rightarrow dW = -P dV$

Isotherme : $T = \text{cste}$ et $P = \frac{m R T}{M V} \Rightarrow W_{\text{isotherme}} = \frac{m R T}{M} \ln \frac{V_{\text{fin}}}{V_{\text{init}}}$

■ {point 1 $\rightarrow$ point 2} :

$\Rightarrow W_{1,2} = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{m R T}{M} dV = - m R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \Rightarrow W_{1,2} = - \frac{m R T_1}{M} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = - \frac{m R T_1}{M} \ln \left(\frac{1}{a} \right)$

AN : $W_{1,2} = 146,4 \text{ KJ}$

■ {point 3 $\Rightarrow$ point 4} :

✗ $W_{3,4} = - \frac{m R T_3}{M} \ln(a)$ AN: $W_{3,4} = -439,1 \text{ KJ}$

Isobares : $W_{\text{isobare}} = -P(V_f - V_i)$

$\Rightarrow W_{\text{isobare}} = - \frac{m R}{M} (T_f - T_i)$

■ $Q_{3,4} = n C_p (T_4 - T_3) = \frac{m \gamma R}{M(\gamma-1)} (T_4 - T_3)$ avec : $n = \frac{m}{M}$ et $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$. on a $P = \text{Cst}$ car Isobare alors $dP=0$ donc : $\delta Q = C_p dT + h dP \Rightarrow \delta Q = C_p dT$

AN : $Q_{3,4} = 1203 \text{ KJ}$

✗ $\delta Q = n C_v dT + l dV$ avec Isochore $V = \text{cst} \Rightarrow dV=0$ donc : $\delta Q = n C_v dT \Rightarrow \delta Q_{5,1} = \frac{m R}{M(\gamma-1)} (T_1 - T_5)$ AN : $\delta Q_{5,1} = -455,7 \text{ KJ}$

5) les valeurs des chaleurs reçue Q_c et fournie Q_f par la masse d'air qui décrit le cycle

- ✗ $Q_{2,3}$ et $Q_{3,4}$ sont des chaleurs reçues car $Q_{2,3} > 0$ et $Q_{3,4} > 0$
- ✗ $Q_{5,1}$ est une chaleur fournie car $Q_{5,1} < 0$

6) le rendement η de cycle. $\eta = -\frac{W_{cycle}}{\sum Q_{recue}}$

$$1^{er} \text{ Principe } W_{cycle} + \sum Q = 0 \Rightarrow -W_{cycle} = \sum Q$$

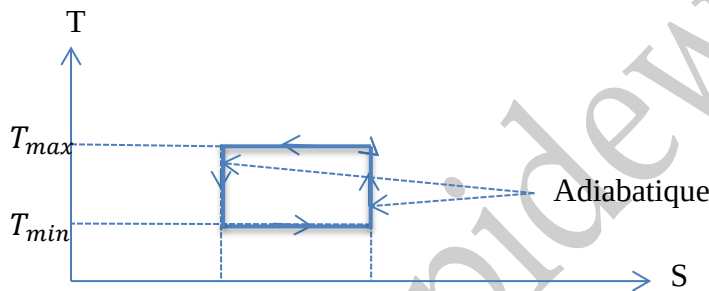
$$\Rightarrow W_{cycle} = -(Q_{23} + Q_{34} + Q_{51})$$

$$\text{Alors : } \eta = \frac{Q_{23} + Q_{34} + Q_{51}}{Q_{23} + Q_{34}} \text{ AN : } \eta = 63\%$$

7) le rendement du cycle de Carnot η_{carnot} qui fonctionne avec les sources de chaleurs T_1 et T_3

a) Cycle de Carnot :

✗ Diagramme (T,S)



b) Rendement de cycle de Carnot $\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{Max}}$

AN : $\eta_{carnot} = 87\%$

c) Comparaison :

$\eta < \eta_{carnot}$ Théorème de Carnot : le rendement d'un cycle de Carnot est toujours maximal

Contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM

Exercice 1 :

Soit une machine thermique fonctionnant entre deux sources de chaleur T_c et T_f ($T_c > T_f$).

- 1) Faites les schémas de principe et précisez les signes des travaux et des quantités de chaleur dans le cas où cette machine fonctionne comme :
 - Une machine motrice
 - Une pompe à chaleur
- 2) Définir puis exprimer en fonction de T_c et T_f
 - Le rendement maximal de la machine motrice
 - L'efficacité maximale de la pompe à chaleur
- 3) Pour ces deux machines, tracer le cycle de Carnot correspondant en précisant le sens et les différentes transformations qui le constituent :
 - Dans le diagramme de Clapeyron (P,V)
 - Dans le diagramme (T,S)

Exercice 2 :

Le fluide d'un réfrigérateur subit une transformation cyclique suivant un cycle de Carnot au cours d'un cycle de durée t , le fluide reçoit le travail W ($W > 0$)

- 1) Soit Q_2 de la chaleur cédée par la source froide (température T_2), soit Q_1 la chaleur reçue par la source chaude (température T_1), comparer la valeur de Q_1 à celle Q_2 .
- 2) En supposant le cycle décrit de façon réversible, calculer Q_2 en fonction de W , T_1 et T_2 .
- 3) Quelle masse de glace m peut – on fabriquer par seconde à partir d'eau prise à 0°C ? (on néglige la chaleur massique de la glace).
- 4) Peut-on refroidir l'air de la cuisine en laissant ouverte la porte du réfrigérateur ?

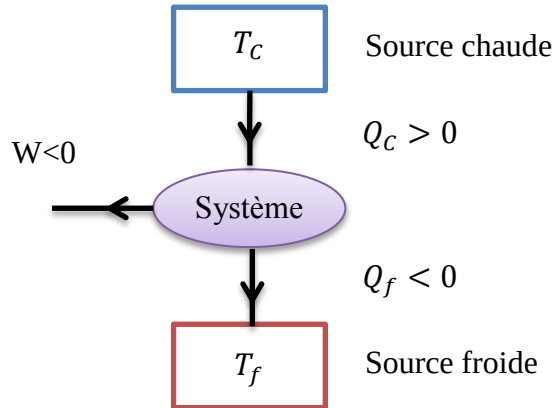
Données de l'exercice :

- Le travail est fourni par un moteur de puissance $P=200\text{ W}$, $T_1=50^\circ\text{C}$ et $T_2=5^\circ\text{C}$
- La chaleur latente de solidification de l'eau est $L=320\text{ J/g}$
- La durée d'un cycle est 10 s .

Corrigés de contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2007-2008 FSSM

Exercice 1 :

1) Schéma principale d'une machine motrice



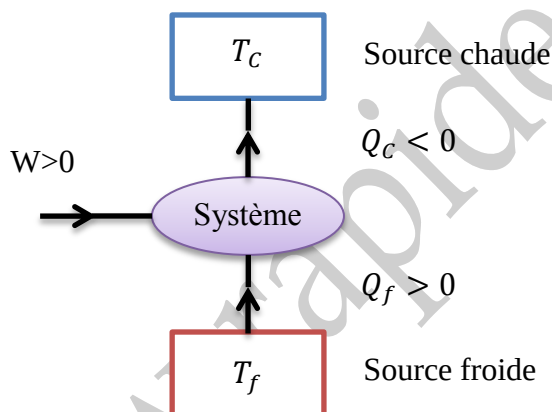
T_c : Température de source chaude

T_f : Température de source froide

W : Le travail du cycle

Q_c : Chaleur de la source chaude

2) Schéma principale d'une pompe à chaleur



T_c : Température de source chaude

T_f : Température de source froide

W : Le travail du cycle

Q_c : Chaleur de la source chaude

✗ Le rendement maximal de la machine motrice

$$\eta = \frac{-W_{cycle}}{Q_c} \quad 1^{er} \text{ principe : } W_{cycle} + Q_c + Q_f = 0$$

$$\Rightarrow Q_c + Q_f = -W_{cyc}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

Pour une transformation réversible 2^{ème} principe : $\Delta S_{syst} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \Rightarrow \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c} \quad \text{D'où } \eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{T_c - T_f}{T_c}$$

$$\eta_{max} = \frac{T_c - T_f}{T_c}$$

✗ L'efficacité maximale de la pompe à chaleur.

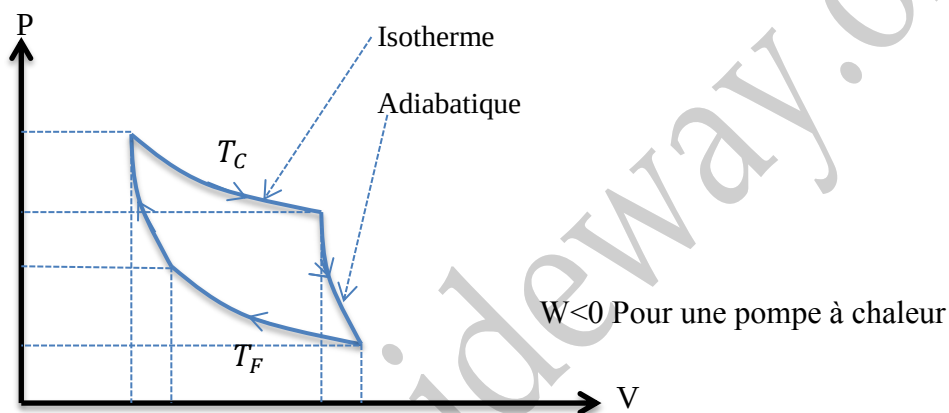
$$\beta = -\frac{Q_c}{W} \text{ avec } W = -(Q_c + Q_f) \text{ 1}^{\text{er}} \text{ principe}$$

$$\beta = +\frac{Q_c}{Q_c + Q_f} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} \text{ avec } \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \Rightarrow \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c} \Rightarrow \beta = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

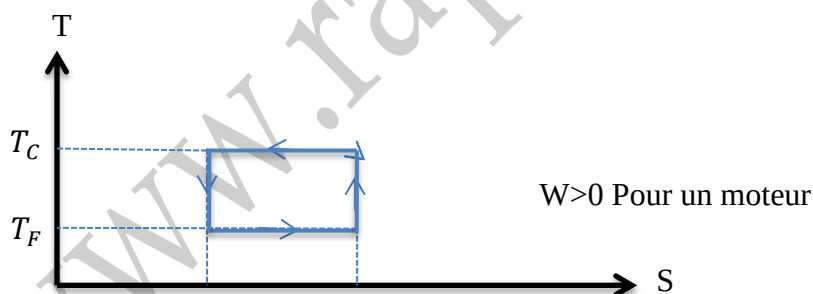
$$\text{Alors } \beta_{\max} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

8) Le cycle de Carnot

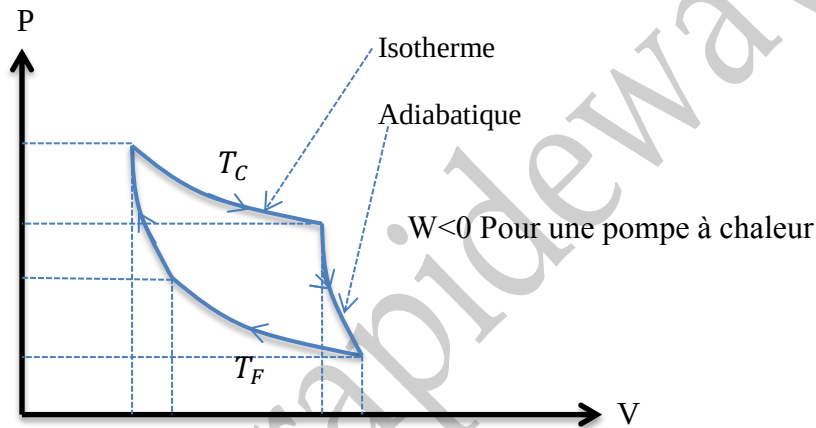
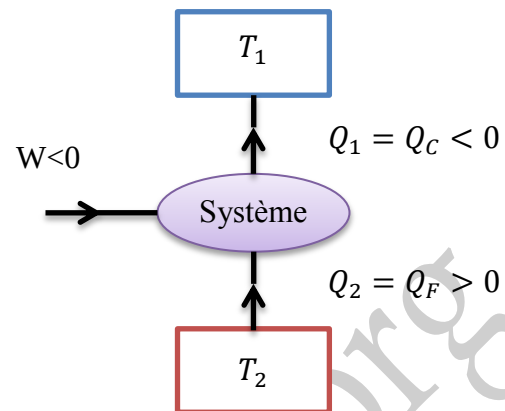
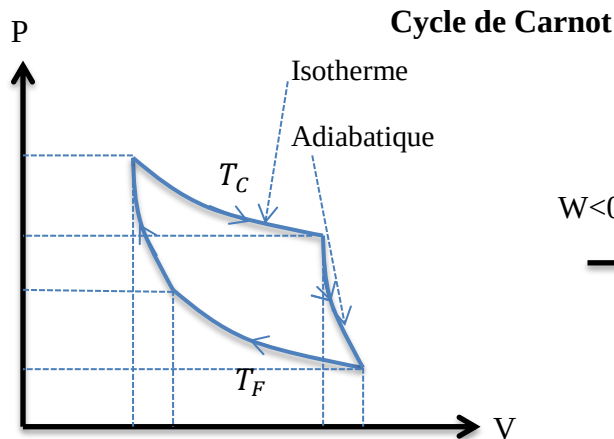
✗ Diagramme de Clapeyron (P,V)



✗ Diagramme (T,S)



Exercice 2 :



- 1) D'après le schéma principale on $|Q_1| = |W| + |Q_2|$ Ce qui entre au système est égale à ce qui sort. 2^{ème} principe pour un cycle fermé $\Delta S_{\text{système}} = 0 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$.

$$\Delta S_2 = \int \frac{\delta Q}{T_2} = \frac{Q_2}{T_2} \quad \Delta S_1 = \int \frac{\delta Q}{T_1} = \frac{Q_1}{T_1}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{T_1}{T_2} \quad \text{car} \quad \frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2} \Rightarrow |Q_2| = -\frac{T_2}{T_1} Q_1 \quad \text{on a} \quad \frac{T_2}{T_1} < 1 \Rightarrow |Q_2| < |Q_1|$$

- 2) On a : $\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W + Q_1 + Q_2$ 1er principe

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{2eme principe}$$

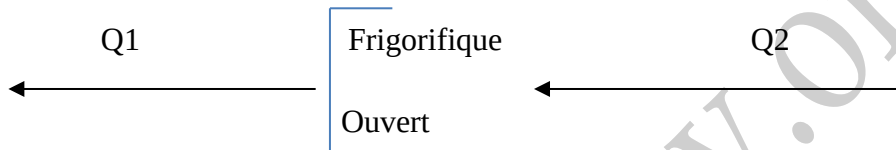
$$\left. \begin{array}{l} 1 \Rightarrow Q_1 = (W + Q_2) \\ 2 \Rightarrow Q_1 = \frac{T_1}{T_2} Q_2 \end{array} \right\} \Rightarrow Q_2 \frac{T_1}{T_2} = -(W + Q_2)$$

$$\text{donc: } Q_2 = W \cdot \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad \text{AN: } W = 200W, T_1 = 323K, T_2 = 268K$$

3) On a $Q_2 = mL_f$ (L_f : la chaleur latente de fusion de la glace)

$$\Rightarrow m(\text{de glace fondue}) = m \frac{Q_2}{L_f} \quad H_f = \frac{320J}{g}$$

$$\Rightarrow m = \frac{W}{L_f} \cdot \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (\text{en kg})$$



La machine extrait Q_2 de la cuisine et donne $|Q_1|$ à la cuisine

$\Rightarrow$ la cuisine reçoit $|Q_1| - Q_2 > 0 \Rightarrow$ la cuisine s'échauffe

C'est-à-dire On ne peut pas refroidir l'air de la cuisine en laissant ouverte la porte du réfrigérateur On a $Q_1 + Q_2 + W = 0 \Rightarrow -Q_1 = W + Q_2 \Rightarrow |Q_1| = W + Q_2$

Contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM

Exercice 1 :

Deux liquides L_1 et L_2 de températures T_1 et T_2 respectivement ($T_2 > T_1$) sont isolés du milieu extérieur et mis en contact thermique. On désigne par C_1 la capacité calorifique de L_1 et par C_2 la capacité calorifique de L_2 .

- 1) Déterminer la température d'équilibre T_e .
- 2) Dans le cas où les deux liquides sont identiques de capacités calorifiques $C_1 = C_2 = C$
 - a) Déterminer la variation d'entropie ΔS_1 de L_1 .
 - b) Déterminer la variation d'entropie ΔS_2 de L_2 .
 - c) Déterminer la variation d'entropie de l'univers ΔS .
 - d) Vérifier le second principe.

Exercice 2 :

Dans le moteur diesel, l'évolution du gaz admis dans le cylindre est représentée de façon approximative par le diagramme ci-contre, abstraction faite des phases d'aspiration et de refoulement.

- 1) De l'air, pris initialement à la pression $P_A = 10^5 \text{ Pa}$ et à une température $t_A = 20^\circ \text{C}$ est aspiré sous pression constante dans le cylindre du moteur de volume V_A , puis comprimé. La compression adiabatique réversible représentée par la branche AB du diagramme le porte à la température $t_B = 500^\circ \text{C}$.

On appelle rapport volumétrique de compression $r = \frac{V_A}{V_B}$, le rapport du volume V_A offert à l'air à la fin de la course d'aspiration, au volume V_B de l'espace qu'il occupe à la fin de la compression.

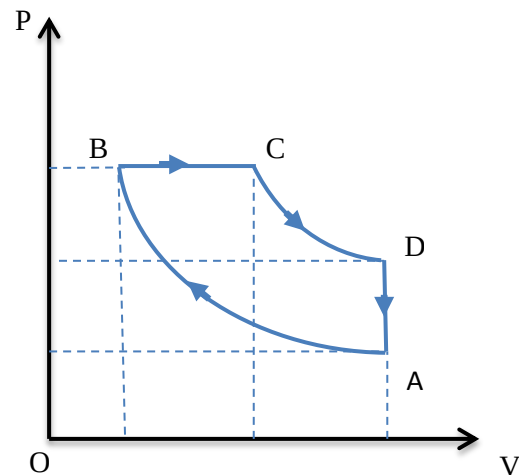
Calculer le rapport r de la pression finale atteinte P_B en supposant que le rapport des chaleurs massiques de l'air est constant. On prendra $T(K) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$ et $\gamma = 1,4$.

- 2) A la fin de la compression adiabatique réversible qui a amené l'air dans l'état représenté par le point B du cycle, on injecte le combustible finement pulvérisé qui s'enflamme. La proportion des gaz de combustion étant toujours très petite, on admettra que c'est pratiquement la masse d'air initiale qui évolue seule dans le moteur. La combustion s'effectue à pression constante (partie BC du cycle).

La chaleur massique molaire à pression constante de l'air est $c_p = 30 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Le pouvoir calorifique du combustible rapporté à la mole du mélange gazeux après combustion, est $8 \cdot 10^{14}$ Joules.

Calculer la température T_C atteinte en fin de combustion et le rapport $r' = \frac{V_C}{V_B}$ des volumes à la fin et au départ de la combustion.



- 3) La combustion terminée, le gaz se détend de façon adiabatique réversible, jusqu'à ce qu'il occupe le volume V_D égal au volume initial V_A . Sa température est alors T_D .

Enfin, à l'ouverture de la soupape permettant de sortir du gaz, on admet que ce dernier subit un refroidissement rapide à volume constant qui le ramène à la pression atmosphérique initiale.

- a) Etablir l'expression de la température T_D atteinte à la fin de la détente adiabatique réversible :

$$T_D = T_C \left(\frac{r'}{r} \right)^{\gamma-1}$$

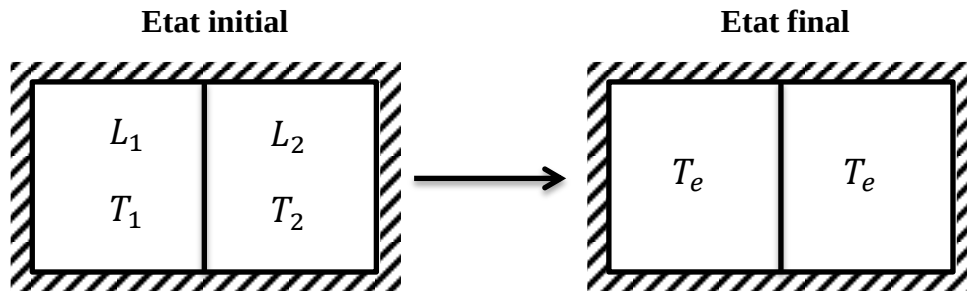
- b) Etablir l'expression du rendement de ce moteur diesel :

$$\rho = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$$

- c) Calculer ρ .

Corrigé de contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM

Exercice 1



1) Transformation irréversible isolée

$$\begin{aligned}\Delta U(L_1 + L_2) &= 0 = \Delta U_1 + \Delta U_2 \\ \Delta U_1 &= c_1 dT = c_1(T_e - T_1) \text{ et } \Delta U_2 = c_2 dT = c_2(T_e - T_2) \\ \Rightarrow \Delta U &= c_1(T_e - T_1) + c_2(T_e - T_2) = 0 \\ \Rightarrow T_e(c_1 + c_2) &= c_2 T_2 + c_1 T_1 \\ \Rightarrow T_e &= \frac{c_2 T_2 + c_1 T_1}{c_1 + c_2} \quad (T_e = \frac{T_1 + T_2}{2} \text{ si } c_1 = c_2)\end{aligned}$$

2)

a) $dS = \frac{\delta Q}{T}$ pour une transformation réversible.

$$\begin{aligned}\Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 \text{ passe de } T_1 \text{ à } T_e \\ dS_1 &= \frac{\delta Q_1}{T} = c_1 \frac{dT}{T} \Rightarrow S_1 = \int_{T_1}^{T_e} c_1 \frac{dT}{T} = c_1 \ln\left(\frac{T_e}{T_1}\right) = c_1 \ln\left(\frac{T_e}{T_1}\right)\end{aligned}$$

b) L'entropie h_1 h_2 passe de T_2 à T_e

$$\Rightarrow dS_2 = \frac{\delta Q_2}{T} = c_2 \frac{dT}{T} \Rightarrow S_2 = \int_{T_2}^{T_e} c_2 \frac{dT}{T} = c_2 \ln\left(\frac{T_e}{T_2}\right)$$

$$c-S = S_1 + S_2 = c_1 \ln\left(\frac{T_e}{T_1}\right) + c_2 \ln\left(\frac{T_e}{T_2}\right)$$

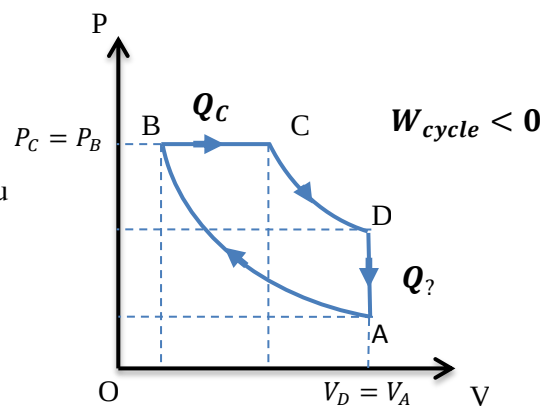
$$\Rightarrow c \ln\left(\frac{T_e^2}{T_1 T_2}\right) \quad (\text{car } c_1 = c_2 = c)$$

$$c) \frac{T_e^2}{T_1 T_2} = \frac{(T_1 - T_2)^2 + 4T_1 T_2}{4T_1 T_2} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} + 1 > 1$$

$$\Delta S(h_1 + h_2) > 0 \quad S_{finale} > S_{initiale}$$

$\Rightarrow$ L'entropie du système augmente. 2^{ème} principe :

l'entropie d'un système isolé augmente avec l'évolution du système.



Exercice 2 :

1) Le rapport $r = \frac{V_A}{V_B}$

$$A \rightarrow B : \text{Transformation adiabatique} \Rightarrow P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \text{ ou } T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow r = \frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \text{ avec } T_A = t_A = 293K, T_B = t_B = 773K, \gamma = 1,4$$

$$\text{A.N : } r = 11,3$$

$$\text{On a } P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \Rightarrow P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = P_A \cdot r^\gamma$$

$$P_B = P_A r^\gamma \text{ avec } P_A = 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow \text{A.N : } P_B = 29,80 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2) T_C ?

$$B \rightarrow C \text{ isobare} \Rightarrow P = Cte \Rightarrow dP = 0$$

$$\text{On a } \delta Q_{BC} = c_p dT + h dP = c_p dT \text{ (h=v pour un gaz parfait)}$$

$$\Rightarrow Q_{BC} = \int_{T_B}^{T_C} c_p dT = c_p (T_C - T_B) \text{ donc } T_C = \frac{Q_{BC}}{c_p} + T_B$$

$$\text{A.N : } T_C = 3473K \text{ (} Q_{BC} = 8 \cdot 10^4 \text{ J, } T_B = 773 \text{ K, } c_p = 30 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1} \text{)}$$

$$B \rightarrow C \text{ isobare} \Rightarrow P = Cte$$

$$\text{On a : } P_B V_B = nRT_B, \text{ et } P_C V_C = nRT_C$$

$$\Rightarrow \frac{P_B V_B}{P_C V_C} = \frac{nRT_B}{nRT_C} \Rightarrow \frac{V_B}{V_C} = \frac{T_B}{T_C} \text{ (car } P_B = P_C = Cte \text{)}$$

$$\text{Donc } r' = \frac{V_C}{V_B} = \frac{T_C}{T_B}$$

$$\text{A.N : } r' = \frac{V_C}{V_B} = \frac{T_C}{T_B} = 4,49 \text{ (} T_C = 3473 \text{ K et } T_B = 773 \text{ K)}$$

1)

a) Calcul de T_D :

$$\text{On a } r' = \frac{V_C}{V_B} \text{ et } r = \frac{V_A}{V_B} \Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{V_C}{V_A}$$

$$\text{■ } D \rightarrow A \text{ Transformation isochore : } V_D = V_A = Cte.$$

$$\text{■ } C \rightarrow D \text{ Transformation adiabatique : } PV^\gamma = Cte$$

$$T_D V_D^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_A^{\gamma-1} \Rightarrow T_D = T_C \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\gamma-1} = T_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\gamma-1}$$

b) ρ : le rendement du moteur .

$$\rho = -\frac{W_{cycle}}{Q_C} = -\frac{W_{cycle}}{Q_{BC}} \text{ (car } Q_{BC} = c_p (T_C - T_B) > 0 \text{)}$$

1^{er} principe :

$$\Delta U_{cycle} = W_{cycle} + \sum_{i=0}^4 Q_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 Q_i = -W_{cycle} \text{ avec } \sum_{i=1}^4 Q_i = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

et $Q_{AB} = Q_{CD} = 0$ car $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$ sont adiabatiques.

$$\Rightarrow -W_{cycle} = Q_{BC} + Q_{DA}$$

$$\Rightarrow \rho = -\frac{W_{cycle}}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$$

$$\blacksquare Q_{DA} = \int_{T_D}^{T_A} c_V dT = c_V (T_A - T_D) \text{ (car } dV = 0)$$

$$\blacksquare Q_{BC} = \int_{T_B}^{T_C} c_p dT = c_p (T_C - T_B) \text{ (car } dV = 0)$$

$$\rho = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{c_V}{c_p} \cdot \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} \text{ (avec } \frac{c_p}{c_V} = \gamma) \text{ Donc } \rho = 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$$

c) A.N : $\gamma = 1,4$, $T_A = 293 \text{ K}$, $T_D = 2370 \text{ K}$, $T_C = 3440 \text{ K}$, $T_B = 773 \text{ K}$

$$\rho = 44,37 \%$$

Contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

EXERCICE

On entend par «donner le signe de x » l'une des réponses $x < 0$, $x \leq 0$, $x = 0$, $x \geq 0$.
On entend par «justifier une réponse», une explication sous forme d'une phrase ou d'une formule.

On désigne par :

- Q_c la quantité de la chaleur échangée avec la source chaude de température T_c .
- Q_f la quantité de la chaleur échangée avec la source froide de température T_f .
- W le travail du cycle relatif aux chaleurs Q_c et Q_f

Chacune des B, C et D peut être traitée indépendamment de l'autre

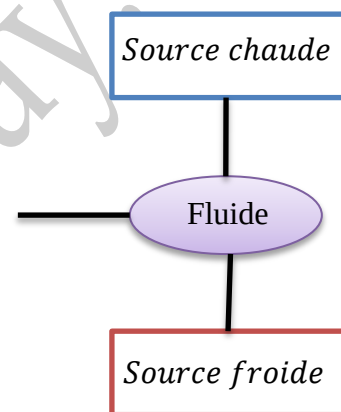
B. pour les machines diathermes quelconques (réversibles ou irréversibles) :

B.1- Rappeler l'équation entre Q_c , Q_f , et W conséquence du 1^{er} principe.

B.2-En déduire le signe de $\{[(-Q_c)/w]-1\}$.

B.3-Rappeler l'inéquation entre Q_c , Q_f , T_c et T_f conséquence du 2^{ème} principe.

B.4-Déduire le signe de $\{T_c/(T_c-T_f)-[(-Q_c)/W]\}$ des 2^e et 1^e principes.



C. soit un récepteur diatherme quelconque (réversible ou irréversible) :

C.1.faire le schéma ci-contre en y indiquant sens et signe de Q_c , Q_f , et W .

C.2.Rappeler l'expression de l'efficacité ec (W , Q_c) d'une pompe à chaleur.

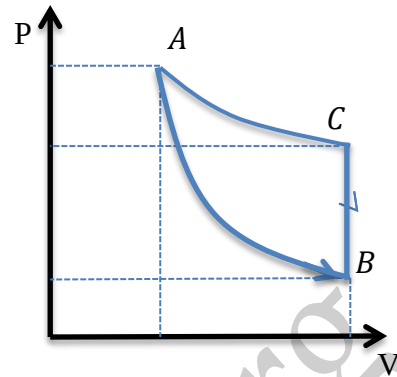
C.3.Déduire les bornes $ec_{min} < ec < ec_{max}$ (en utilisant les réponses B ou pas).

C.4. Que représente la limite supérieure de ec ?

C.5.représenter dans le diagramme (P , V) le cycle récepteur de Carnot.

Dans une machine ditherme, une mole de gaz parfait diatomique subit un cycle à 3 transformations :

- CA est une compression isotherme réversible allant de C vers A.
- AB est une détente adiabatique réversible allant de A vers B.
- BC est une détente isochore irréversible allant de A vers B,



On donne $R=8,32 \text{ J.K}^{-1}$, $C_V=(3/2)R$, $T_C=373\text{K}$ et $T_B=293 \text{ K}$, $V_A=3,27 \text{ litres}$ et $V_C=24,4 \text{ litres}$.

D- Questions relatives aux chaleurs échangées le long du cycle ABCA ci-dessus et leurs applications

- D.1.** Donner le signe de Q_{AU} en justifiant la réponse.
- D.2.** Calculer l'expression et la valeur numérique de Q_{BC} .
- D.3.** Calculer l'expression et la valeur numérique de Q_{CA} .
- D.4.** Donner le signe de W en justifiant la réponse. Indiquer si C'est un moteur ou un récepteur.
- D.5.** Des signes de Q_{AB} , Q_{BC} ou Q_{CA} , déduire laquelle correspond à Q_C
- D.6.** Calculer l'expression et la valeur de l'efficacité de la pompe à chaleur utilisant ce cycle.
- D.7.** La source chaude contient un mélange à l'équilibre sous 1 atm d'eau liquide et de vapeur. On donne pour l'eau, $L_V = 2500 \text{ J.Kg}$ Calculer l'expression puis la valeur numérique de la masse d'eau m_C évaporée par cycle dans la source chaude.

Corrigés de contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

Exercice :

B. les machines dithermes :

B.1 : 1^{er} principe : $\Delta U_{cycle} = Q_c + Q_f + W = 0$

$W = -(Q_f + Q_c)$

B.2 : $\left(-\frac{Q_c}{W}\right) - 1$

On a $W = -(Q_f + Q_c) \Rightarrow \frac{Q_c}{W} - 1$ est celui de $\frac{Q_f}{W}$

* si on a une machine moteur $\Rightarrow W < 0$ et $Q = < 0 \Rightarrow -\frac{Q_c}{W} - 1 > 0$ car $\frac{Q_f}{W} > 0$

D'où $-\frac{Q_c}{W} - 1$ est toujours positives.

B.3 : D'après le 2^e principe.

$\Delta S = S_1 + S_2 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \Rightarrow \frac{Q_c}{Q_f} = -\frac{T_c}{T_f}$

B.4 : ce signe $\frac{T_c}{T_c - T_f} - \left[\frac{-Q_c}{W}\right]$?

On a : $\frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c} \Rightarrow \frac{T_c}{T_c - T_f} = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} \Rightarrow \frac{T_c}{T_c - T_f} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} = \frac{Q_c}{W}$

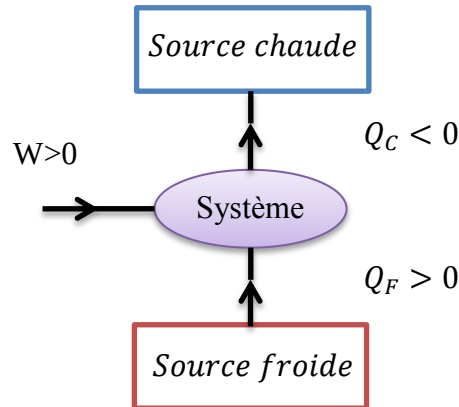
Donc : $\frac{T_c}{T_c - T_f} - \left(\frac{-Q_c}{W}\right) = \frac{Q_c}{W} + \frac{Q_c}{W} = 2 \frac{Q_c}{W}$

Si la machine est un moteur $\Rightarrow Q_c > 0$ et $W < 0 \Rightarrow$ la signe de $\frac{2Q_c}{W} < 0$

Donc : $\frac{T_c}{T_c - T_f} - \left[\frac{-Q_c}{W}\right] < 0$

C : Récepteur ditherme quelconque (réversible on inversible)

C.1 : Schéma principale d'un recepteure.



C.2 : l'efficacité $ec(W, Q)$ d'une pompe à chaleur . $Ec = \frac{-Q_c}{W}$

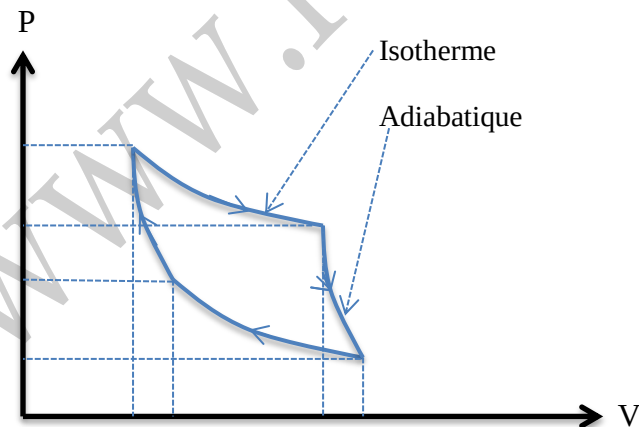
C.3 : on a $ec = -\frac{Q_c}{W} - 1 > 0$ D'après B :2 $\Rightarrow ec > 1$

Et on a $\frac{T_c}{T_c - T_f} - \left[-\frac{Q_c}{W} \right] \leq 0 \Rightarrow \frac{T_c}{T_c - T_f} \leq -\frac{Q_c}{W}$ Donc $\frac{T_c}{T_c - T_f} \leq ec$

D'où $1 < e \leq \frac{T_c}{T_c - T_f}$ avec $ec_{min} = 1$, et $Ec_{max} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

C.4 : la limite supérieure de ec représente le rendement de Carnot

C.5 : Cycle de Carnot dans le diagramme (P, V)



D :

D.1 : le signe de Q_{AB}

AB : transformation adiabatique :

$$\Rightarrow Q_{AB} = 0$$

D.2 : l'expression de Q_{BC}

$$\text{On a } dU = \delta Q_{BC} + \delta W_{BC} \text{ avec } \delta W_{BC} = P dV = 0$$

$$\Rightarrow Q_{BC} = U_{BC} = \int_{T_B}^{T_C} C_p dT = C_p(T_C - T_B)$$

$$C_p - C_v = R \Rightarrow C_p = R + C_v = R + \frac{3}{2R} = 8,32 + \frac{3}{2 \cdot 8,32}, \quad C_p = 8,5$$

$$Q_{BC} = 8,5 (373 - 293) = 680 \text{ J} \Rightarrow Q_{BC} = 680 \text{ J}$$

D.3: l'expression de Q_{CA}

$$\text{CA: Isotherme réversible: } \delta Q_{CA} = C_v dT + P dV \quad (dT = 0)$$

$$\Rightarrow \delta Q_{CA} = W_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} P dV = \int_{V_C}^{V_A} nRT \frac{dV}{V} = nR \int_{V_C}^{V_A} \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow Q_{CA} = nRT_C \ln \frac{V_A}{V_C} \quad (\text{car } n = 1)$$

$$\text{AN: } V_A = 3,27 \text{ l} ; V_C = 24,4 \text{ l} ; R = 8,22 \text{ J/K} ; T_C = 373 \text{ K}$$

$$Q_{CA} = 8,32 \cdot 373 \ln \left(\frac{3,27}{24,4} \right) \Rightarrow Q_{CA} = -6237,11 \text{ J}$$

$$\text{D.4: on a le cycle décrit dans le sens trigonométrie } \Rightarrow W_{\text{cycle}} > 0$$

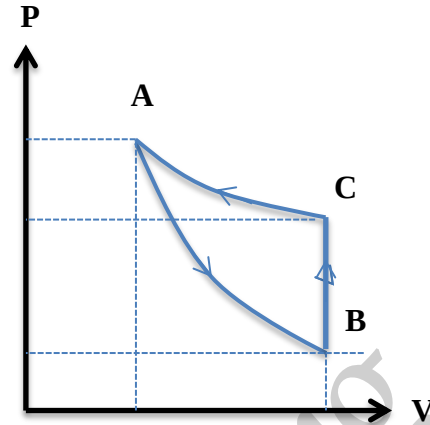
D'où c'est un récepteur

D.5 : dans un récepteur on a $Q_c < 0$ et $Q_f > 0$ et

$$Q_{CA} < 0 \Rightarrow Q_{CA} = Q_c \text{ de la source chaude .}$$

$$Q_{BC} > 0 \Rightarrow Q_{BC} = Q_f \text{ de la source froide .}$$

D.6 : l'efficacité de la pompe à chaleur e



$$e = -\frac{Q_c}{W_{cycle}} = -\frac{Q_{CA}}{W_{cycle}} \quad \text{1er principe} \Rightarrow \Delta U = 0$$

$$\Delta U = W_{cycle} + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = W_{cycle} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0$$

$$\text{Donc } W_{cycle} = -(Q_{BC} + Q_{CA}) = -(Q_f + Q_c)$$

$$\Rightarrow e_c = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} \quad \text{AN} \quad e = -\frac{6237,11}{-6237 + 680} = 1,122$$

D.7 : l'eau l'évaporation d'eau se fait dans la transformation BC :

$$\text{On a } Q_{BC} = mL_v \Rightarrow m = \frac{Q_{BC}}{L_v} \Rightarrow m_c = 0,272 \text{ Kg}$$

www.rapideway.org

Contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2003-2004 FSSM

N.B : - Lire le problème en entier avant de répondre. Certaines questions sont indépendantes

- Donner d'abord la réponse littérale à chaque question et encadrer là, avant de donner la réponse numérique, qui sera aussi encadrée.

Questions de cours :

- 1) Sur le diagramme ci-contre, sont représentés une isotherme et une adiabatique. Indiquer le numéro de chacune de ces deux transformations.
- 2) Répondre par vrai ou faux à l'affirmation suivante : « La chaleur échangée au cours d'une transformation quelconque s'écrit toujours $\delta Q = Tds$ ». Justifier votre réponse.

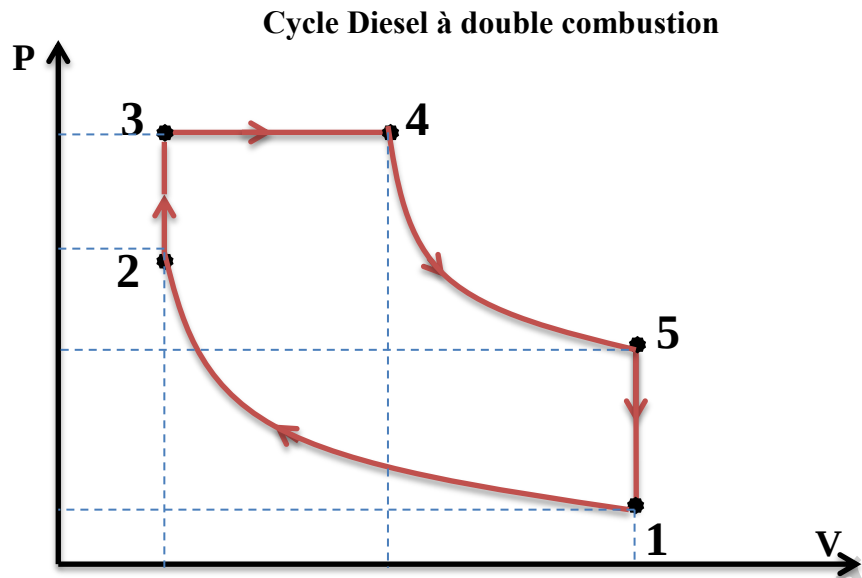
Problème : Cycle Diesel à double combustion.

Le cycle de la figure ci-dessous représente mieux le cycle réel d'un moteur diesel. Ce cycle est dit à double combustion. Le carburant est injecté au point 2 et sa combustion commence en 2 et se termine en 4. Il s'agit d'un cycle réversible décrit par l'air. Les transformations 1-2 et 4-5 sont des adiabatiques.

Au point 1 la pression est $P_1 = 1 \text{ atm}$ et la température est $T_1 = 293K$. Au point 4, la pression $P_4 = 65 \text{ atm}$ et la température est $T_4 = 2200K$. Le taux de compression est $a = V_1/V_2 = 19$. On suppose que l'air est un gaz parfait diatomique ($\gamma = C_p/C_v = 1,4$) de masse molaire $M = 29 \text{ g/mol}$.

La constante des gaz parfaits est $R = 8,32 \text{ J/(mol.K)}$.

- 1) Sans faire de calcul, donner le signe du travail de ce cycle W_{cycle} . Justifier votre réponse.
- 2) Calculer les températures et les pressions de l'air aux points 2, 3, et 5 du cycle.
- 3) Calculer les chaleurs échangées, par une masse $m=1\text{kg}$ d'air, au cours de chaque transformation du cycle. Indiquer les chaleurs reçues et celle fournies par l'air. Justifier votre réponse.
- 4) Exprimer le rendement η_{Diesel} , de ce cycle en fonction des chaleurs échangées uniquement. Calculer ce rendement.
- 5) On veut comparer ce rendement à celui obtenu si le moteur fonctionnait selon un cycle de Carnot avec deux sources de chaleur de températures $T_{max} = 2200K$ et $T_{min} = 293K$.
 - a) Donner le schéma du cycle de Carnot dans le diagramme (T, S), en précisant la nature de chaque transformation.
 - b) Calculer le rendement, η_{Carnot} , de ce cycle
 - c) Comparer ces rendements η_{Diesel} et η_{Carnot} . Explique



Corrigés de contrôle N : 2 Thermodynamique Filière SMPC/SMA 2003-2004 FSSM

Questions de cours :

- 1) On a pour une transformation isotherme l'équation d'état : $PV = nRT$ avec T constante

Transformation adiabatique : $PV^\gamma = cte$

Isotherme : $P = \frac{nRT}{V} = \frac{C}{V}$

Adiabatique : $P = \frac{C}{V^\gamma}$

Quand $V \rightarrow \infty$, tend vers 0 avant l'isotherme, donc :

La transformation (1) est adiabatique

La transformation (2) est isotherme

- 2) Faux car $\delta Q = Tds$ est valable pour une transformation reversible

Problème : Cycle Diesel à double combustion

- 1) Le cycle est décrit dans le sens horaire $\Rightarrow W_{cycle} > 0$ c'est un cycle moteur

- 2) $1 \rightarrow 2$: transformation adiabatique : $PV^\gamma = cte$

Alors : $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ ou $P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$ ou $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$
(GP: $PV = nRT$)

$$\Rightarrow T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1 = a^{\gamma-1} \cdot T_1 \text{ AN; } T_2 = 951,4 \text{ K}$$

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow P_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma P_1 = a^\gamma P_1 \text{ AN; } P_2 = 61,69 \text{ atm}$$

$2 \rightarrow 3$: Transformation isochore: $V = V_2 = V_3 = cte$

$3 \rightarrow 4$: transformation isobare: $P_3 = P_4 \Rightarrow P_3 = 65 \text{ atm}$

$$\begin{cases} P_1 V_1 = nRT_1 \\ P_2 V_2 = nRT_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (V_2 = V_3)$$

$$T_3 = \frac{P_3}{P_2} \cdot T_2 \text{ A.N: } T_3 = 1002,45 \text{ K}$$

$4 \rightarrow 5$ Adiabatique et $5 \rightarrow 1$ isobare:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_5}{T_5} \text{ et } T_4 P_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_5 P_5^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (P_5 V_5^\gamma = P_4 V_4^\gamma \text{ et } PV = nRT)$$

$$\text{D'où } P_5 = P_1 P_4^{1-\gamma} \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^\gamma \text{ et } T_5 = \frac{P_5}{P_1} T_1$$

$$\text{A.N : } P_5 = 3,17 \text{ atm et } T_5 = 928,8 \text{ K}$$

- 3) Calcul de chaleurs échangées :

$$\blacksquare \quad 1 \rightarrow 2 \text{ Adiabatique} \Rightarrow Q_{1,2} = 0$$

■ $4 \rightarrow 5$ Adiabatique $\Rightarrow Q_{4,5} = 0$

■ $Q_{2,3} = \int_{T_2}^{T_3} C_V dT = nC_V(T_3 - T_2) = \frac{mR}{M(\gamma-1)}(T_3 - T_2)$

($\delta Q = C_V dT + l dV$ et $dV = 0$ car $2 \rightarrow 3$ est isochore)

(on a $n = \frac{m}{M}$ et $C_V = \frac{R}{\gamma-1}$) AN : $Q_{2,3} = -36,63.10^3 J$

■ $Q_{3 \rightarrow 4} = nC_p(T_4 - T_3) = \frac{m}{M} \cdot \frac{\gamma R}{\gamma-1}(T_4 - T_3)$ ($n = \frac{m}{M}$ et $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$)

($\delta Q = C_p dT + l dP$ avec $dP = 0$ car $3 \rightarrow 4$ est isobare)

AN $Q_{3,4} = 1203.10^3 J = 1203 KJ$

■ $Q_{5,1} = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_5)$ AN : $Q_{5,1} = -455,7 KJ$

($\delta Q = C_V dT + l dV$ avec $dV = 0$ car $5 \rightarrow 1$ est isochore)

$Q_{2,3}$ et $Q_{3,4}$ sont des chaleurs reçues car $Q_{2,3} > 0$ et $Q_{3,4} > 0$

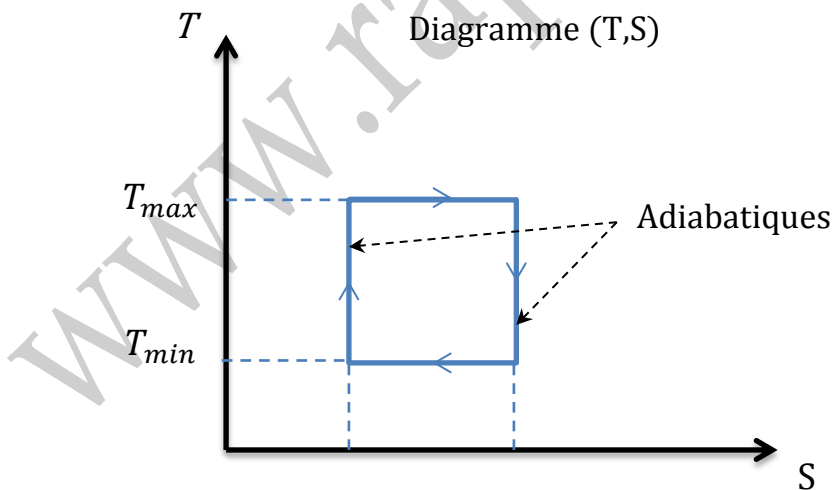
$Q_{5,1}$ est une chaleur fournie car $Q_{5,1} < 0$

4) Le rendement : $\eta = -\frac{W_{cycle}}{\sum Q_{reçues}}$

1^{er} Principe $W_{cycle} + \sum Q = 0 \Rightarrow -W_{cycle} = \sum Q \Rightarrow W = -(Q_{2,3} + Q_{3,4} + Q_{5,1})$

$\eta = \frac{Q_{2,3} + Q_{3,4} + Q_{5,1}}{Q_{2,3} + Q_{3,4}}$ AN : $\eta = 63\%$

5) a) Cycle de Carnot :



b) $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}$ AN: $\eta_{Carnot} = 87\%$

c) $\eta_0 < \eta_{Carnot}$ Théorème de Carnot : Le rendement d'un cycle de Carnot est toujours maximal.

Mathématiques

Contrôle N : 2 Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

Exercice 1 :

On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base
- 2) Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^3$

Exercice :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer A^2 en fonction de A et de I_2 où : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 2) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $MA^2 = A^2M \Leftrightarrow MA = AM$
- 3) Calculer A^8 .

Exercice 3 :

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(e_1) = (1, 0, 2)$, $f(e_2) = (0, 1, 1)$ et $f(e_3) = (1, -2, 0)$.

- 1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $f(x, y, z)$.
- 2) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
- 3) Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
- 4) Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 0)$.
Montrer que $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
- 5) Déterminer la matrice de passage, $P_{B, B'}$, de B à B' et calculer son inverse.
- 6) Déterminer la matrice $\text{mat}(f, B')$ de f par rapport à la base B' .

Corrigés de contrôle N : 2 Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

Exercice 1 :

On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$

1) Montrons que F est un sous espace vect de $\mathbb{R}^3$ et en déterminant une base.

■ on a $(0,0,0) \in F$ car $0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow F \neq \emptyset$

■ soit $u = (x, y, z) \in F$ et $v = (x', y', z') \in F$

Montrons que $u + v \in F$

On a $u + v = (x + x', y + y', z + z')$

$$(x + x') + (y + y') + (z + z') = (x + y + z) + (x' + y' + z') = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in F.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ montrons que $\lambda u \in F$

On a $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \Rightarrow \lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = \lambda \times 0 = 0$ Car $(x, y, z) \in F$

Conclusions : F est un sous espace vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons une base de F :

On a $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y - z\}$$

$$= \{(-y-z, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{vect}\{(-1, 1, 0); (-1, 0, 1)\}$$

Donc $B = \{(-1, 1, 0); (-1, 0, 1)\}$ est une base $\Rightarrow \dim F = 2$

2) Déterminons un sous espace vecteur supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^3$:

$$\text{Soit } u = (x, y, z) \Rightarrow \det \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x + y) + z = 0$$

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ alors αu qui vérifie $\alpha(x + y + z) = 0$ n'est pas un ss esp vect sup de F dans $\mathbb{R}^3$; donc il faut trouver un sous espace vectoriel G de F dans $\mathbb{R}^3$ tel que $G \neq (x + y + z = 0)$.

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculons $A^2 = f(A \text{ et } I_2)$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Donc } A^2 = (A) + I_2$$

2) $M \in M_2(\mathbb{R})$, $MA^2 = A^2M \Leftrightarrow MA = AM$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow MA^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+c & a+d \end{pmatrix}$

Et $A^2M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+c & a+d \end{pmatrix}$

Donc $MA^2 = A^2M \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = 2a+c \\ 2c+d = a+c \\ a+b = 2b+d \\ c+d = a+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ c=a \Leftrightarrow a=b=c \\ d=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow MA^2 = \begin{pmatrix} 3a & 2a \\ 2a & a \end{pmatrix} = A^2M$

Donc $M = \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aA = Aa \Leftrightarrow MA = AM$ pour que $MA^2 = A^2M$

3) Calculons A^8 :

On a $A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Donc $A^8 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 35 \\ 21 & 19 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$f(e_1) = (1, 0, 2)$, $f(e_2) = (0, 1, 1)$ et $f(e_3) = (1, -2, 0)$

4) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculons $f(x, y, z)$

$f(x, y, z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1) + z(1, -2, 0)$
 $= (x, 0, 2x) + (0, y, y) + (z, -2z, 0)$

$f(x, y, z) = (x + y, y - 2z, 2x + y)$

5) Déterminons une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de (f) .

$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 ; y - 2z = 0 ; 2x + y = 0\}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = -2z ; x = z\}$

$$= \{(-z, 2z, z) / z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{vect}\{(-1, 2, 1)\}$$

Donc $\{(-1, 2, 1)\}$ est une base de $\text{Ker}(f) \Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = 1$.

base de $\text{Im}(f)$: soit $(x', y', z') \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = y - 2z \Leftrightarrow y' + 2x' = y + 2x = z' \\ z' = 2x + y \end{cases}$$

Donc $(x', y', z') \in \text{Im}(f) = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 / y' + 2x' = z'\} = \{(x', y', 2x' + y') / x', y' \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Im}(f) = \text{vect}\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$$

Donc $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ est une base de $\text{Im}(f) \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 2$

6)

$$\text{On a } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1-2) = 3 \neq 0$$

Donc $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont deux ss espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

7) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 0)$

Montrons que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

On a $\text{card } B' = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

$$\text{Et on a } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow B' \text{ est libre} \Rightarrow B' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3$$

8) Déterminons $P_{B, B'} = \text{Mat}(f, B_1)$

$$\text{On a } \begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 = e_1 - e_2 \\ u_3 = e_3 \end{cases} \Rightarrow P_{B, B'} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \quad \text{donc } P_{B, B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } P_{B, B'}^{-1} = P_{B', B} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 = u_3 \\ (u_1 + u_2 - u_3) \frac{1}{2} = e_1 \\ e_2 = e_1 + u_2 = \frac{3}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_3 \end{cases} \text{ donc } P_{B, B'}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

9) Déterminer la matrice $\text{Mat}(f, B')$ de f par rapport à la base B'

Soit $A = \text{Mat}(f, B_1)$

Contrôle N : 2 Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

Exercice 1:

On considère les vecteurs $u = (1,0,2)$, $v = (1,-1,3)$ et $w = (1,1,1)$.

- 1) Calculer $2u - v$.
- 2) La famille $\{u, v, w\}$ est-elle libre?
- 3) Déterminer la dimension de l'espace $F = \text{vect}(u, v, w)$.

Exercice 2:

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$f(e_1) = (1,1,2) \quad f(e_2) = (-1,0,-1) \quad \text{et} \quad f(e_3) = (0,1,1).$$

- 1) Calculer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et la dimension de $\text{Im}(f)$.
- 3) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ où $f^2 = f \circ f$.

Exercice 3 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs $u_1 = (1,0,-1)$, $u_2 = (1,2,1)$ et $u_3 = (1,1,1)$.

- 1) Montrer que $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminer la matrice de passage P de B à B_1 et son inverse P^{-1} .
- 3) Déterminer la matrice A_1 de f par rapport à la base B_1 .
- 4) Calculer A_1^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer ensuite A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé de contrôle N : 2 Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

Exercice 1 :

On considère les vecteurs : $u = (1,0,2)$, $v = (1,-1,3)$ et $w = (1,1,1)$

1) calculer $2u - v$

On a $2u = (2,0,4)$ et $-v = (-1,1,-3) \Leftrightarrow 2u - v = (2,0,4) + (-1,1,-3) = (1,1,1) = w$

2) la famille $\{(u, v, w)\}$ est-elle libre ?

Puisque : $2u - v = w \Leftrightarrow$ il existe une relation entre u, v et $w \Leftrightarrow \det(u, v, w) = 0$

Alors : $\{(u, v, w)\}$ n'est pas libre

Déterminons la dimension de $F = \text{vect}\{(u, v, w)\}$

On a : $2u - v = w \Leftrightarrow (u, v, w) = (u, v, 2u - v) = u(1,0,2) + v(0,1,-1)$

Donc $F = \text{vect}(u, v, w) = \text{vect}\{(1,0,2), (0,1,-1)\}$

Par conséquent : $\dim F = \text{card } F = 2$

Exercice 2 :

(e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(e_1) = (1,1,2); f(e_2) = (-1,0,-1); f(e_3) = (0,1,1)$$

1) calculons $f(x, y, z)$ pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = ((x - y), (x + z), (2x - y + z))$$

2) base de $\ker(f)$

$$\ker(f) = \{(x, y, z) / x = y; 2x - y + z = 0; x = -z\}$$

$$\ker(f) = \{(x, x, -x) / x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(1,1,-1)\}$$

Donc $\{(1,1,-1)\}$ est une base de $\ker(f) \Rightarrow \dim \ker(f) = 1$.

- Puisque $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f) \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 2$.

3) Montrons que $\ker(f) = \ker(f^2)$ où $f^2 = f \circ f$.

$$\text{On a : } (f^2) = \{x, y, z / f(x^2, y^2, z^2) = (0,0,0)\} = \{(1,1,-1)\} = \ker(f) .$$

Exercice 3 :

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $B(e_1, e_2, e_3)$ base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (1, 1, 1)$$

1) M.Q $B_1=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Comme : $\dim B_1 = \text{card } B_1 = 3$

$$\text{Et } \det B_1 = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow B_1$ est libre $\Leftrightarrow B_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$2) \quad P_{B \text{ à } B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P^{-1}_{BB'} = ?$$

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - e_3 \\ u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ u_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 - u_2 = e_1 \\ u_3 - u_2 - u_1 = e_3 \\ u_1 + u_3 = e_1 + e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = u_3 - u_2 \\ e_2 = u_1 + u_3 - u_3 + u_2 = u_1 + u_2 \\ e_3 = u_3 - u_2 - u_1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } P^{-1}_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Déterminons la matrice A_1 de f par rapport à la base B_1

$$M(f, A_1) =$$

Contrôle de rattrapage - Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

Exercice 1:

On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$.

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminer une base de F .
- 3) Soient $u = (1, 1, 1)$ et $G = \text{vect}(u)$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et la dimension de $\text{Im}(f)$.
Soient $u_1 = (0, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (2, -1, 0)$.
- 3) Montrer que la famille $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 4) Déterminer la matrice de passage P de B à B_1 et son inverse P^{-1} .
- 5) Déterminer la matrice A_1 de f par rapport à la base B_1 .

Exercice 3:

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer la matrice B telle que $A = B + I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
- 2) Calculer B^2 et B^3 .
- 3) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé de contrôle de rattrapage - Algèbre I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

Exercice 1 :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$$

1) Montrons que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

On a $(0, 0, 0) \in F$ car $2 \times 0 - 0 + 0 = 0$

Soit $u = (x, y, z) \in F$ et $v = (x', y', z') \in F \Rightarrow u + v = (x + x', y + y', z + z')$

Or $2(x + x') - (y + y') + (z + z') = (2x - y + z) + (2x' - y' + z') = 0 + 0 = 0$

D'où le résultat.

2) Déterminons une base de F :

On a $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\} = \{(x, 2x + z, z) / x, z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$

Donc $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de F .

3) Soient $u = (1, 1, 1)$ et $G = \text{vect}(u)$

Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

$$F \oplus G = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ \mathbb{R}^3 = F + G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G \end{cases}$$

Montrons .que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$\text{Soit } (x, y, z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = y = z \end{cases} \text{ donc } F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$$

Et $\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

Exercice 2 :

$$B = (e_1, e_2, e_3) \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) calculer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

On a $f(x, y, z) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$

$$= (2x + y + z; -y + z; 3x + y + 2z)$$

2) $\text{Ker}(f)$ et la dim de $\text{Im}(f)$

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y = z \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = z \text{ et } x = -z\}$$

$$= \{(x, -x, -x) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Ker}(f) = \text{vect}\{(1, -1, -1)\} \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 2 \text{ car } \dim \text{Ker}(f) = 1$$

3) On a $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{En effet } \det B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0 \Leftrightarrow B_1 \text{ est libre} \Leftrightarrow B_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3$$

$$4) P_{B, B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

* Son inverse

$$\text{On a : } \begin{cases} u_1 = e_3 \\ u_2 = e_1 - e_2 + e_3 \\ u_3 = 2e_1 - e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 = u_1 \\ e_1 - e_2 = u_2 - u_1 \\ 2e_1 - e_2 = u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 = u_1 \\ e_1 = u_3 - u_2 + u_1 \\ e_2 = u_3 - u_2 + u_1 - u_2 + u_1 = 2u_1 - 2u_2 + u_3 \end{cases}$$

$$\text{Donc } P_{B, B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

$$\text{On considère } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1) \text{ Déterminer } B \text{ tq } A = B + I_3 \text{ où } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ d'où } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) calculons B^2 et B^3

$$\text{On a } B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Calculons A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{On a } A = B + I_3 \Leftrightarrow A^n = (B + I_3)^n = B^n + nB^{n-1} + \dots + I^{n-1}B + I^n$$

$$\text{Avec : } I^n = I^{n-1} = I^{n-2} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } n \geq 3 \Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } A_n = I_n + \alpha I_n - 1B + \beta I_n - 2B_2$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalement } A^n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \beta = n$$

Contrôle N° :2 - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

Exercice 1:

- Montrer que la courbe représentant la fonction $f(x) = x^3 + 2x + 1$ coupe l'axe des x .
- Est-ce que la courbe représentant f coupe l'axe des x en un seul point ou plusieurs ? (Justifier votre réponse).

Exercice 2:

Montrer que pour tout $x > 1$.

$$\frac{2}{x+1} < \log(1+x) \leq x$$

Exercice 3:

On considère la fonction $f(x) = (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Déterminer le domaine de définition D_f de f .

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Est-ce que f est prolongeable par continuité en 0?

Calculer f' sur D_f .

Déterminer l'asymptote de f + ∞ et $-\infty$, ainsi que la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercice 4:

Calculer les limites suivantes:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \log(1+x)}$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+x)}{\cos x - 1}$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + x)^{\frac{1}{x}}$,

Exercice 5:

Calculer

- $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$
- $\int_0^1 e^{2x} \sin x dx$

Corrigé de contrôle N° :2 - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2005-2006 FSSM

Exercice1 :

1) Montrons que la courbe représentant la fonction $f(x) = x^3 + 2x + 1$ coupe l'axe des x

Remarquons que dans l'intervalle $[-1 ; 0]$; On peut appliquer le théorème de Rolle :

$$\text{On a } f(-1) = (-1)^3 + 2 \times (-1) + 1 = -2 < 0 \text{ et } f(0) = 0 + 2 \times 0 + 1 = 1 > 0$$

Donc $f(0).f(-1) < 0$ et d'après le théorème de Rolle :

$$\exists c \in]-1; 0[\text{ tel que } f(c) = 0$$

Par conséquent la courbe représentant la fonction $f(x) = x^3 + 2x + 1$ coupe l'axe des x .

2) Il suffit de remarquer $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc la fonction f est strictement croissante

Par conséquent la courbe de f coupe l'axe des x en un seul point.

Exercice2:

a) Montrons que $\frac{x}{x+1} \leq \log(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$

$$\text{On a } \log(1+x) = \log(1+x) - \log(1) = \log(b) - \log(a) \text{ avec } b=1+x \text{ et } a=1.$$

En utilisant le théorème de l'accroissement fini

$$\Rightarrow \exists c \in [a ; b] \text{ tq } f(t) = \log(t) \text{ est dérivable sur }]a ; b[$$

$$\text{Et on a } f'(t) = \frac{1}{t} ; \text{ or } a \leq c \leq b$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a}.$$

$$\text{D'après le théorème } f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

$$\text{Avec } f(b) = \log(1+x) \text{ et } f(a) = \log(1)$$

$$\text{D'où } \log(1+x) = [(1+x) - 1] f'(c) = x f'(c)$$

$$\text{Or } \frac{1}{b} \leq f'(c) \leq \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \leq f'(c) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \leq x f'(c) \leq x$$

$$\text{Par conséquent } \frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$$

Exercice3:

$$f(x) = (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

a) Domaine de définition D_f de f : On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

b) calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Et puisque } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1 \quad \text{Par suite} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{De même } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Et comme } \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)^2 = 1 \quad \text{On déduit que} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

c) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f$ n'est pas continue en 0.

Par conséquent f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

d) calculons f' sur D_f :

$$\forall x \in D_f = \mathbb{R}^* \quad f \text{ est dérivable avec } f'(x) = 2(x-1) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\text{Par suite } f'(x) = 2(x-1) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}.$$

e) L'asymptote de f en $+\infty$ et $-\infty$ aussi que de la courbe par rapport à l'asymptote.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Posons } y = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow \pm\infty \quad \Rightarrow \quad y \rightarrow 0^\pm$$

$$\Rightarrow f(y) = \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 \arctan(y) = \left(\frac{1-y}{y}\right)^2 \arctan(y)$$

Exercice4:

Calculons les limites :

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \log(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{1 - \frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(e^x + \sin x - 1)}{x}$$

Ou encore $\begin{cases} e^x \underset{0}{\approx} 1+x \\ \cos x \underset{0}{\approx} 1 - \frac{x^2}{2} \end{cases}$ et $\log(1+x) \underset{0}{\approx} x - \frac{x^2}{2}$ donc $x - \log(1+x) \underset{0}{\approx} \frac{x^2}{2}$

$$\Leftrightarrow e^x - \cos x - x \underset{0}{\approx} 1+x-1+\frac{x^2}{2}-x \underset{0}{\approx} \frac{x^2}{2} \text{ D'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \log(1+x)} \underset{0}{\approx} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \log(1+x)} = 1$

2)

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+x)}{\cos x - 1}$

On a $\log(1+x) \underset{0}{\approx} x \Leftrightarrow x \log(1+x) \underset{0}{\approx} x^2$ et $\cos x \underset{0}{\approx} 1 - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \cos x - 1 \underset{0}{\approx} -\frac{x^2}{2}$

D'où $\frac{x \log(1+x)}{\cos x - 1} \underset{0}{\approx} \frac{x^2}{-x^2/2} = -2$ Par suite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+x)}{\cos x - 1} = -2$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \log(\cos x + \sin x)}$$

Or $\cos x \underset{0}{\approx} 1$ et $\sin x \underset{0}{\approx} x \Leftrightarrow \cos x + \sin x \underset{0}{\approx} 1+x$

D'où $\log(\cos x + \sin x) \underset{0}{\approx} x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \log(\cos x + \sin x) \underset{0}{\approx} 1$

Et par conséquent $e^{\frac{1}{x} \log(\cos x + \sin x)} \underset{0}{\approx} e$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e$

Exercice5:

a)

Calculons $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$

On a $x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 4 - 4 \times 5 = -16 < 0$ et $\Delta = (4i)^2$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i$ et $x_2 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 5 = (x - x_1)(x - x_2) = (x + (1 + 2i))(x - (-1 + 2i))$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 2x + 5} = \frac{a}{(x + (1 + 2i))} + \frac{b}{(x - (-1 + 2i))} = F(x)$

Déterminons a et b :

$$a = \left[[x + (1 + 2i)] F(x) \right]_{x = -(1 + 2i)} = \left[\frac{1}{[x - (2i - 1)]} \right]_{x = -(1 + 2i)} = \frac{1}{-1 - 2i - 2i + 1} = \frac{-1}{4i}$$

Et $b = \bar{a} = \frac{1}{4i}$

D'où $F(x) = -\frac{1}{4i} \left[\frac{1}{(x + (1 + 2i))} + \frac{1}{(x - (-1 + 2i))} \right]$ donc

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 F(x) dx &= -\frac{1}{4i} \left[\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x + (1 + 2i))} + \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x - (2i - 1))} \right] \\ &= -\frac{1}{4i} \left([\ln(x + (1 + 2i))]_{-1}^1 - [\ln(x - (2i - 1))]_{-1}^1 \right) \\ &= -\frac{1}{4i} \ln \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right) \end{aligned}$$

c/c : $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = -\frac{1}{4i} \ln \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)$

b)

Calculons $I = \int_0^1 e^{2x} \sin x dx$ (intégration par partie)

Posons $\begin{cases} u = \sin x \\ v' = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \cos x \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{\sin x}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} \cos x \, dx = \frac{\sin 1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} \cos x \, dx \quad (*)$$

Posons $J = \int_0^1 e^{2x} \cos x \, dx$ par intégration par partie on aura :

$$\text{Considérons } \begin{cases} u = \cos x \\ v' = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -\sin x \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{D'où } J = \left[\frac{\cos x}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} \sin x \, dx = \left(\frac{\cos(1)}{2} e^2 - 1 \right) + \frac{1}{2} I$$

$$\text{Par conséquent } (*) \Rightarrow I = \frac{\sin(1)}{2} e^2 - \frac{1}{2} J = \frac{\sin(1)}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\cos(1)}{2} e^2 - 1 \right) + \frac{1}{2} I \right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sin(1)}{2} e^2 - \frac{\cos(1)}{2} e^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} I$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} I = \frac{e^2}{2} (\sin(1) - \cos(1)) + \frac{1}{2}$$

$$\text{c/c : } I = \frac{2}{5} e^2 (\sin(1) - \cos(1)) + \frac{2}{5}$$

$$\text{Par suite } \int_0^1 \exp(2x) \sin x \, dx = \frac{2}{5} e^2 (\sin(1) - \cos(1)) + \frac{2}{5}$$

Contrôle N° :2 - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM

Exercice 1:

- 1) On considère la fonction $f(x) = (x + 1) \arctan x$. Donner l'équation de la tangente en $x = 0$ au graphe de f et la position de ce graphe par rapport à cette tangente
- 2) Etudier les branches infinies de

$$g(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Exercice 2:

Calculer les primitives:

- a) $\int \frac{4x}{(x-2)^2} dx$
- b) $\int \frac{x+1}{x(x-2)^2} dx$
- c) $\int \frac{1}{\sin x} dx$ et en déduire $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$
- d) $\int e^{3x}(x+1)dx$

Exercice 3:

- a) Calculer $\int_1^e (\log x)^2 dx$.
- b) Soit $I_n = \int_1^e (\log x)^n dx$. Montrer que $I_n = e - nI_{n-1}$.
- c) En déduire la valeur de $\int_1^e (\log x)^2 dx$ et $\int_1^e (\log x)^3 dx$.

Exercice 4:

Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer.

Corrigé de contrôle N° :2 - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM

Exercice 1 :

1°) On considère la fonction $f(x) = (x+1)\arctan x$

* l'équation de la tangente en $x = 0$ au graphe de f

On a $y = f(x) + (x - x_0)f'(x_0)$ avec $x_0 = 0$

Or $f(0) = \arctan(0) = 0$ et $f'(x) = \arctan x + (x+1) \times \frac{1}{1+x^2}$

$$\Leftrightarrow f'(0) = \arctan(0) + (0+1) \times \frac{1}{1+0} = 1$$

Donc $y = x$ est l'équation de la tangente du graphe de la fonction f .

* la position de ce graphe par rapport à cette tangente pour obtenir la position de la courbe par rapport à cette tangente, on cherche sur DL de f au voisinage de x_0 à un ordre $n \geq 2$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

avec $a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0)$ et $a_n = f^{(n)}(x_0)$

avec a_n le 1° coefficient non nul dans le DL après a_1 ; On a

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1(1+x^2) - 2x(x+1)}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2 - 2x^2 - 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2-2x}{(1+x^2)^2}$$

Donc $f''(0) = f''(x_0) = 1+1 = 2 \neq 0$

Alors $a_n = f''(0) = 2$ ici $n = 2$ est paire :

$$\Rightarrow f(x) - x = 2x^2 + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} \varepsilon(x) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \end{matrix}$$

Dans le signe de $f(x) - x =$ le signe de $2x^2$ qui est positif

Donc la courbe représentant f est au-dessus de sa tangente.

2°) Etude des branches infinies de $g(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

Exercice 2 :

Calcul des primitives :

$$a) \int \frac{4x}{(x-2)^2} dx \quad ; \text{ On a } \frac{4x}{(x-2)^2} = f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2}$$

Déterminons a, b ; pour b on a $b = [f(x) \cdot (x-2)^2] = [4x] = 8$. Donc $b = 8$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{8}{(x-2)^2} = \frac{a(x-2)+8}{(x-2)^2} = \frac{ax-2a+8}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ -2a + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } f(x) = \frac{4}{(x-2)} + \frac{8}{(x-2)^2}$$

$$\text{Par conséquent } \int f(x) dx = 4 \int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{dx}{(x-2)^2} = 4[\ln(x-2)] - 8 \left[\frac{1}{x-2} \right]$$

$$\text{Finalement } \int f(x) dx = \int \frac{4x}{(x-2)^2} dx = 4 \ln(x-2) - \frac{8}{x-2} + c^{ste}$$

$$b) \int \frac{x+1}{x(x-2)^2} dx$$

$$\text{On a } \frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{x}{x(x-2)^2} + \frac{1}{x(x-2)^2} = g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{x}{x(x-2)^2} + \frac{1}{x(x-2)^2}$$

$$\text{Or } \frac{1}{x(x-2)^2} = \frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{x-2} + \frac{c_1}{(x-2)^2} = g_1(x)$$

$$\text{Déterminons } a_1, b_1 \text{ et } c_1 : \text{ On a } c_1 = [(x-2)^2 g_1(x)]_{x=2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Et } a_1 = [x g_1(x)]_{x=0} = \frac{1}{4} \Rightarrow g_1(x) = \frac{1}{4x} + \frac{b_1}{x-2} + \frac{1}{2(x-2)^2}$$

$$\text{On a } g_1(x) = 1 = \frac{1}{4} - b_1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow b_1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$\text{Finalement } g_1(x) = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{2(x-2)^2}$$

$$c) \int \frac{1}{\sin x} dx \quad ; \text{ posons } X = \sin x \Leftrightarrow dx = \cos X dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{X \cos X} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \int \sin x dx + \int \frac{\cos x}{\tan x} dx \quad ???$$

Ou bien : $\int \frac{1}{\sin x} dx$; posons $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} + t \right) dt$$

Exercice 3 :

a) Calculer $\int_1^e \log(x) dx$ posons $X = \log(x) \Leftrightarrow x = e^X$

$$x \rightarrow e \Rightarrow X \rightarrow 1 \quad \Leftrightarrow \quad dX = \frac{1}{x} dx$$

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow X \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad dx = x dX = e^X dX$$

donc $\int_1^e \log(x) dx = \int_0^1 X e^X dX = I$

Intégration par partie : posons $U=X$ et $V'=e^X$

D'où

$$I = \int_0^1 f'(x) g(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx \quad ?$$

$$I = [X e^X]_0^1 - \int_0^1 e^X dx = [e - 0] - [e^X]_0^1 \quad \text{Donc } \int_1^e \log(x) dx = 1$$

$$I = e - (e - 1) = 1$$

b) soit $I_n = \int_1^e (\log x)^n dx$; Montrons que $I_n = e - n I_{n-1}$

par récurrence : On a pour $n = 0$; $I_0 = \int_1^e dx = [x]_1^e = e - 1$

$$n = 1 ; \quad I_1 = \int_1^e (\log x) dx = 1$$

Or $I_1 = e - I_0 = e - (e - 1) = 1$

Donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$

(H.R.) : Supposons que $I_n = e - n I_{n-1}$ pour un n donné ≥ 1

et montrons que $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$

On a $I_n = \int_1^e (\log x)^{n+1} dx = \int_1^e ((\log x)^n \cdot \log x) dx$

Donc $I_{n+1} = \int_1^e (\log x)^n \cdot (\log x) dx$

D'après (H.R.) on a $I_n = e - nI_{n-1}$

Donc $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Finalement $I_n = e - nI_{n-1}$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) En déduit la valeur de $\int_1^e (\log x)^2 dx$ et $\int_1^e (\log x)^3 dx$.

Pour $I_2 = \int_1^e (\log x)^2 dx = e - 2I_1 = e - 2$ ici $n = 2$

De même $\int_1^e (\log x)^3 dx = e - 2I_2 = e - 2(e - 2) = -e + 4$

Exercice 4 :

Considérons l'intégral $I = \int_1^{\log^2} \sqrt{e^x - 1} dx$

Soit $u = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \log(2) \Rightarrow u \rightarrow 1$

$$du = \left((e^x - 1)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (e^x - 1)^{-\frac{1}{2}} e^x \Leftrightarrow du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \left(\frac{(e^x - 1) + 1}{2\sqrt{e^x - 1}} \right) dx = \left(\frac{u^2 + 1}{2u} \right) dx$$

$$\text{Donc } I = \int_0^1 \frac{2u^2}{(u^2 + 1)} du$$

Intégration par parties : posons $g' = \frac{1}{1+u^2} \rightarrow g = \arctan(u)$

$$f = 2u^2 \rightarrow f' = 4u$$

$$\Rightarrow I = [2u^2 \arctan(u)]_0^1 - \int_0^1 4u \cdot \arctan(u) du = 2 \times \frac{\pi}{4} - \int_0^1 4u \arctan(u) du$$

$$\text{Posons } f_1 = \arctan(u) \rightarrow f_1' = \frac{1}{1+u^2}$$

$$g_1' = 4u \rightarrow g_1 = 2u \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2} - ([2u \arctan(u)]_0^1 - 2 \int_0^1 2u du)$$

$$\text{Et par suite } g(x) = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{3}{2(x-2)^2}$$

$$\text{Donc } \int g(x) dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$\text{Par suit } \int g(x) dx = \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{4} \ln(x-2) - \frac{3}{2} \frac{1}{(x-2)} + cst$$

Contrôle de rattrapage - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-u_n}$.

- Montrer que $0 < u_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que (u_n) est monotone.
- En déduire que (u_n) converge et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Montrer que f est continue sur D
- Calculer $f'(x)$ dans D

Exercice 3 :

3) Calculer

- $I_1 = \int \frac{7x-5}{x^2+x+1} dx$
- $I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$
- $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x dx$

4) Montrer que

$$a) \int_{\alpha}^1 \frac{\log x}{1+x^2} + \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\log x}{1+x^2} dx \quad \forall \alpha > 0$$

Corrigé de contrôle de rattrapage - Analyse I - Filière SMPC/SMA 2006-2007 FSSM

Exercice1 : (4pts)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-u_n}$

a) Montrons que $0 < u_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (par récurrence)

pour $n = 0$ on a $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < u_0 < 2$ et vrai .

(H.R.) : supposons que $0 < u_n < 2$ pour un n donné ≥ 1 .

Et montrons que $0 < u_{n+1} < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $0 < u_n < 2$

$$\Rightarrow -2 < -u_n < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 < 3 - u_n < 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} < \frac{1}{3-u_n} < 1 \quad \text{et puisque } 0 < u_n < 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{u_n}{3-u_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < u_{n+1} < 2$$

Par conséquent $0 < u_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Montrons que (u_n) est monotone .

$$\text{On a} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3-u_n} - u_n = \frac{u_n - 3u_n + u_n^2}{(3-u_n)} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n}{3-u_n} = \frac{u_n(u_n - 2)}{3-u_n}$$

Or on a $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n < 2 \quad \Rightarrow \quad u_n - 2 < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{et } 1 < 3 - u_n < 3 \quad \Rightarrow \quad 3 - u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où $u_{n+1} - u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente.

Puisque (u_n) est monotone (décroissante) et bornée $\Rightarrow ((u_n)$ est minorée) $\Rightarrow (u_n)$ est cv

* calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite récurrente.

Posons $u_{n+1} = f(x) = \frac{x}{3-x}$ qui est continue sur $[0,2]$

$$\text{Et on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = ? \Leftrightarrow f(l) = l \Leftrightarrow \frac{l}{3-l} = l$$

$$\Leftrightarrow 3l - l^2 = l \Leftrightarrow l^2 - 2l = 0 \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 2.$$

Exercice 2 :

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie sur } D = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ par : } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

d) Montrons que f est continue sur D

$$\text{on a } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x \sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Règle de l'Hopital } \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x - x \sin x = 2)$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ est continue sur } D = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

e) Calculons f' dans D .

$$\text{On a } f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ par Déf avec } f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}$$

$$\Rightarrow f \text{ est dérivable sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et on a :}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} - \left(-\frac{\cos x}{\sin^2(x)} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sin x \cdot \tan x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice3 :

1) calculer :

$$a) \quad I_1 = \int \frac{7x-5}{x^2-3x+2} dx$$

$$\text{On a } x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \Delta=9-4 \times 1 \times 2=1 \Leftrightarrow x_1=\frac{3-1}{2}=1 \text{ et } x_2=\frac{3+1}{2}=2$$

$$\text{D'où } I_1 = \int \frac{7x-5}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$\text{Par décomposition on a } \frac{7x-5}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-2)} = F(x)$$

$$\Rightarrow a = [(x-1)F(x)]_{x=1} = \left[\frac{7x-5}{(x-2)} \right]_{x=1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\text{Et } b = [(x-2)F(x)]_{x=2} = \left[\frac{7x-5}{(x-1)} \right]_{x=2} = \frac{14-5}{2-1} = 9$$

$$\text{D'où } I_2 = \int \frac{7x-5}{(x-1)(x-2)} dx = \int \frac{-2}{(x-1)} dx$$

$$\Leftrightarrow I_2 = 2\ln(1-x) + 9\ln(x-2) + \text{cste}$$

$$b) \quad I_2 = \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx ; \quad x^2+x+1=0 \quad \Delta=1-4=-3<0 \Rightarrow \Delta=(i\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = e^{-2i\frac{\pi}{3}} \text{ et } x_2 = e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \int \frac{x+1}{\left(x - e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x - e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)} dx = \int f(x) dx \text{ avec } f(x) = \frac{x+1}{\left(x - e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x - e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{a}{\left(x - e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)} + \frac{b}{\left(x - e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)} \Leftrightarrow b = \frac{e^{2i\frac{\pi}{3}} + 1}{\left(e^{2i\frac{\pi}{3}} - e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)} = \frac{e^{2i\frac{\pi}{3}} + 1}{2i \sin \frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{Donc } b = \frac{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{2i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow a = \bar{b} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{D'où } I_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) \ln \left(x - e^{-2i\frac{\pi}{3}} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) \ln \left(x - e^{2i\frac{\pi}{3}} \right) + cste$$

$$\text{c) } I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x \, dx \quad \text{posons} \quad \begin{cases} u = \sin 2x \rightarrow u' = 2 \cos 2x \\ v' = e^x \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow I_3 = \left[e^x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, e^x \, dx$$

$$\Leftrightarrow I_3 = \underbrace{\left[e^{\frac{\pi}{2}} \sin \pi - 0 \right]}_{=0} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, e^x \, dx$$

$$\Leftrightarrow I_3 = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, e^x \, dx \rightarrow \begin{cases} u = \cos 2x \rightarrow u' = -2 \sin 2x \\ v' = e^x \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow I_3 = -2 \left(\left[\cos(2x) e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(2x) e^x \, dx \right)$$

$$\Leftrightarrow 3I_3 = \left[\cos(\pi) e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right] = 2 + e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Par suite } I_3 = \frac{2 + e^{\frac{\pi}{2}}}{3}$$

$$2) \text{ Montrons que } (*) \int_a^1 \frac{\log x}{1+x^2} \, dx + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\log x}{1+x^2} \, dx = 0 \quad \forall a > 0$$

$$\text{Puisque } a > 0 \text{ posons } y = \frac{1}{x} \Rightarrow x \rightarrow a \Rightarrow ay = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{D'après les bornes de l'intégrale } 0 < a < 1 \Leftrightarrow \int_a^1 \frac{\log(x)}{1+x^2} \, dx = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\log(x)}{1+x^2} \, dx + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\log(x)}{1+x^2} \, dx$$

En remplaçons dans (*) on aura

$$\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\log(x)}{1+x^2} \, dx + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\log(x)}{1+x^2} \, dx + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\log(x)}{1+x^2} \, dx + \int_a^1 \frac{\log(x)}{1+x^2} \, dx = 0$$

Chimie Générale- Atomistique

Contrôle de rattrapage Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM

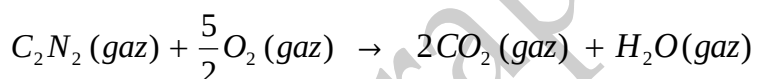
Problème I

On considère les éléments suivants : N_7, P_{15}, As_{33}

- 1) Etablir leurs structures électroniques.
- 2) Comment sont-ils placés dans le tableau périodique ?
- 3) Comparer leur électronégativité(X).
- 4) Expliquer pourquoi la réaction du chlore avec le phosphore peut conduire à la formation de PCL_3, PCL_5 alors qu'avec l'azote il ne se forme que NCl_3 ? (On note que Cl est plus électronégative que N).
- 5)
 - a) Donner la structure de Lewis des molécules suivantes : NH_3, PH_3 et AsH_3 ; et prévoir leur géométrie de base
 - b) Comparer leurs angles de liaison. Justifier.
- 6) Donner la configuration électronique (sans construire le diagramme énergétique) des espèces chimique PN et PN' ; en déduire leurs propriétés magnétiques et les types de liaison.

Problème II :

On considère la réaction de combustion de l'acétylène à 25°C :



- 1) Calculer la variation d'enthalpie standard de cette réaction
- 2) En considérant que la chaleur mise en jeu lors de la combustion est entièrement utilisée à chauffer les produits de la réaction ; déterminer la température de flamme de combustion de C_2H_2 .
- 3) Déterminer la valeur de l'énergie de liaison $C = O$ dans la molécule CO_2 (gaz).

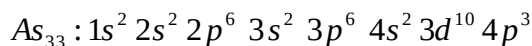
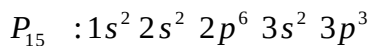
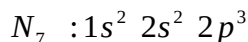
Données :

	C_2H_2 (g)	CO_2 (g)	H_2O (g)	O_2 (g)	H_2 (g)	O (g)	C (g)	$C_{graphie}$
$\Delta H^*_{I,292k}$ (kJ/mol)	226,7	-393,5	-241,8	0	0	232	717	0
C_p (J/mol, k)		37,1	31,3					

Corrigé de rattrapage Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2004-2005 FSSM

Problème I :

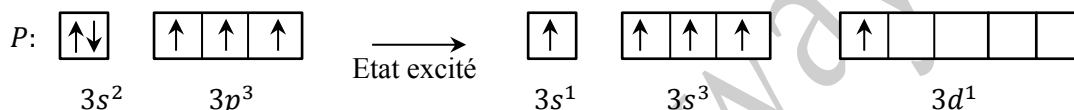
1) Les structures électriques :



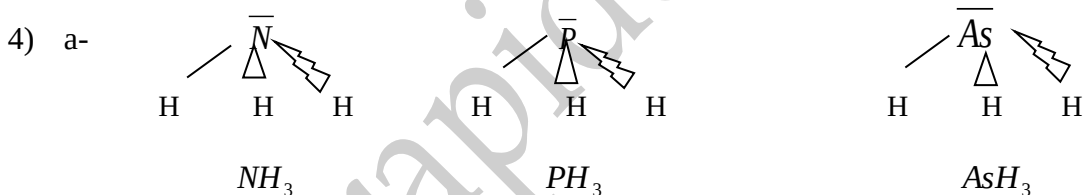
2) Ces éléments sont appartient à la même famille

N, P et As appartient à la même famille et ($z(N) < z(P) < z(As)$) donc $X_N > X_P > X_{As}$

3) on a $X(Cl) > X(P)$: PCl_5 se forme grâce à la répartition électronique (sans forme d'électrons célibataires) sur les orbitales identique qui possède le phosphore (P)



NCl_5 Ne peut pas se former car l'azote (N) du deuxième période ne possède pas l'orbitale d.



b- On a $X_N > X_P > X_{As}$ donc $HNH > HPH > HAsH$ les doublets d'électron sont plus attirés par l'atome le plus électronégatif ce qui provoque une répulsion

Alors l'ouverture relative de l'angle de liaison Donc $HNH > HPH > HAsH$

5) P et N possèdent 5 orbitales de valence et 5 électrons de valence. Donc PN possèdera 10 orbitales atomiques et aussi 10 orbitales moléculaires.

La configuration électronique est donc :

$$\sigma_s^2 \quad \sigma_s^{+2} \quad (\pi_x, \pi_y)^4 \quad \sigma_z^2 \quad \text{avec } \omega = \frac{4\sigma - 2\sigma + 4\pi}{\sigma + 2\pi^2} \quad \text{Une liaison } \sigma \text{ et deux liaisons } \pi$$

On tous les électrons sont antiparallèle d'après la configuration électronique $\Rightarrow$ PN est Diamagnétique

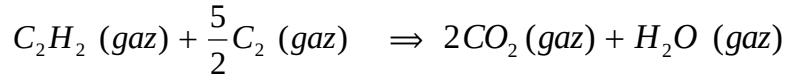
Pour PN^+ il y a un électron au moins célibataire

$$(\sigma_s)^2 \quad \sigma_s^2 \quad (\pi_x, \pi_y)^4 \quad \sigma_z^1 \quad \text{et } \omega' = \frac{3\sigma - 2\sigma + 4\pi}{2} = 0,5\sigma + 2\pi$$

PN^+ possède un électron célibataire donc la molécule PN^+ est paramagnétique.

Problème II :

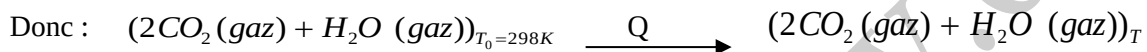
1°) la variation d'enthalpie standard de la réaction :



$$\Delta H_r^0 = 2\Delta H_f^0 CO_2 (g) + \Delta H_f^0 H_2O (g) - \Delta H_f^0 C_2H_2 (g)$$

$$AN : \Delta H_r^0 = 2*(-393,5) + (-241,8) - 226,7 \quad \Delta H_r^0 = -1255,5 \text{ K}$$

2°) ΔH_r^0 est utilisé pour chauffer les produits de réaction

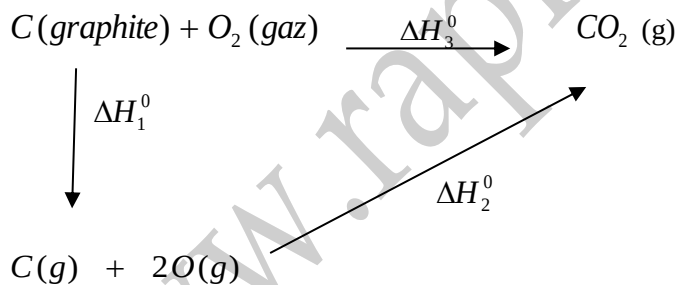


$$\text{Avec : } Q = \int_{T_0}^T (2Cp_{CO_2(g)} + Cp_{H_2O(g)}) dt = (2Cp_{CO_2(g)} + Cp_{H_2O(g)})(T - T_0)$$

$$AN : Q = (2*37,1 + 33,6)(T - T_0)$$

$$\text{Or : } Q + \Delta H_r^0 = 0 \rightarrow T = T_0 + \frac{1255,5*10^3}{107,8} \Rightarrow T = 11944,5 \text{ K}$$

3°) L'énergie de liaison C=O de la molécule $CO_2 (gaz)$



D'après la loi Hess : On a $\Delta H_1^0 + \Delta H_2^0 - \Delta H_3^0$

$$\text{Avec } \Delta H_1^0 = \Delta H_f^0 C(g) + 2\Delta H_f^0 O(g) - \Delta H_f^0 C(\text{graphite}) - \Delta H_f^0 O_2 (g)$$

$$\Delta H_1^0 = 717 + 2*232 - 0 - 0 \Rightarrow \Delta H_1^0 = 1181 \text{ KJ}$$

$$\Delta H_2^0 = 2E_2 (C=O)$$

$$\Delta H_3^0 = \Delta H_f^0 (CO_2 (g)) - \Delta H_f^0 (C(\text{graphite})) - \Delta H_f^0 (O_2 (g)) = -393,5 - 0 - 0 \Rightarrow \Delta H_3^0 = -393,5 \text{ KJ}$$

$$\text{D'où } E_2 (C=O) = \Delta H_3^0 - \Delta H_1^0 = -787,25 \text{ KJ / mol}$$

Contrôle N :2 Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM

Problème I :

A. L'arsenic peut former avec le chlore les composés AsCl_3 et AsCl_5 . Pour chaque composé :

- 1) Etablir la structure de Lewis.
- 2) Donner la géométrie de base et en déduire l'état d'hybridation de As.
- 3) Donner une représentation dans l'espace (faire apparaître les doublets libres autour de l'atome central s'ils existent).
- 4) Les composés AsH_3 et AsH_5 peuvent-ils exister ?
- 5) Pourquoi dans le cas de l'azote, NCl_3 existe alors que NCl_5 ne peut exister ?

B. Avec l'oxygène, l'arsenic peut donner AsO_3^{3-} et AsO_4^{3-} .

- 1) Etablir la structure de Lewis de chaque ion et donner les formes limites possibles.
- 2) Ces ions sont-ils polaires ?
- 3) dans chaque ion, les liaisons arsenic-oxygène ont la même longueur, mais elles sont de longueurs différentes en passant d'un ion à l'autre. Pourquoi ?

Données : $Z(\text{N}) = 7$; $Z(\text{O}) = 8$; $Z(\text{Cl}) = 17$; $Z(\text{As}) = 33$

Electronégativité selon Pauling : H (2,1) ; N (3,0) ; Cl(3,0) ; As(2,1).

Problème II :

On veut étudier quelques espèces comportant le brome.

- 1) Donner, à l'état fondamental, la configuration électronique de l'atome de **Br**.
- 2) sachant qu'il **n'y a pas d'interaction s-p** dans la molécule **Br_2** :
 - a) Donner son diagramme des orbitales moléculaires.
 - b) Donner sa configuration électronique.
 - c) Calculer l'indice de liaison et préciser la nature de(s) liaison(s).
 - d) La molécule **Br_2** est-elle paramagnétique ?
- 3) Sans tracer un autre diagramme, donner les configurations électroniques des ions moléculaires **Br_2^+** et **Br_2^-** .
- 4) Comparer la stabilité de la liaison dans **Br_2** , **Br_2^+** et **Br_2^-** .
- 5) pourquoi les composés **BrF_3** et **BrCl_3** peuvent exister alors que **BrI_3** ne peut pas exister ?

Données : $Z(\text{F}) = 9$; $Z(\text{Cl}) = 17$; $Z(\text{Br}) = 35$; $Z(\text{I}) = 53$.

Problème III :

L'azote ($_7\text{N}$), le phosphore ($_{15}\text{P}$), l'arsenic ($_{33}\text{As}$) et l'antimoine ($_{51}\text{Sb}$) appartiennent à la même famille.

- 1) Pourquoi la température d'ébullition de **AsH_3** est plus grande que celle de **PH_3** ?
- 2) La température d'ébullition de **NH_3** est anormalement élevée. Donner une explication.

- 3) La température d'ébullition de **SbH₃** sera-t-elle plus élevée ou plus faible que celle des trois autres composés ?

Données :

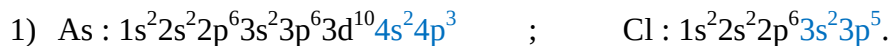
Composé	NH ₃	PH ₃	AsH ₃
Masse molaire (g/mol)	17	34	78
Température d'ébullition (°C)	-33	-87	-55

Electronégativité selon Pauling : H(2,1) ; N(3,0) ; P(2,1) ; As(2,1) ; Sb(1,9).

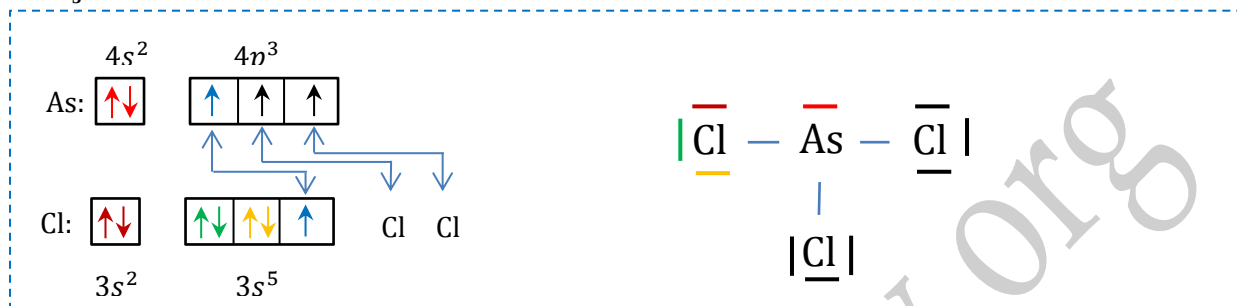
Corrigé de contrôle N :2 Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2009-2010 FSSM

Problème I:

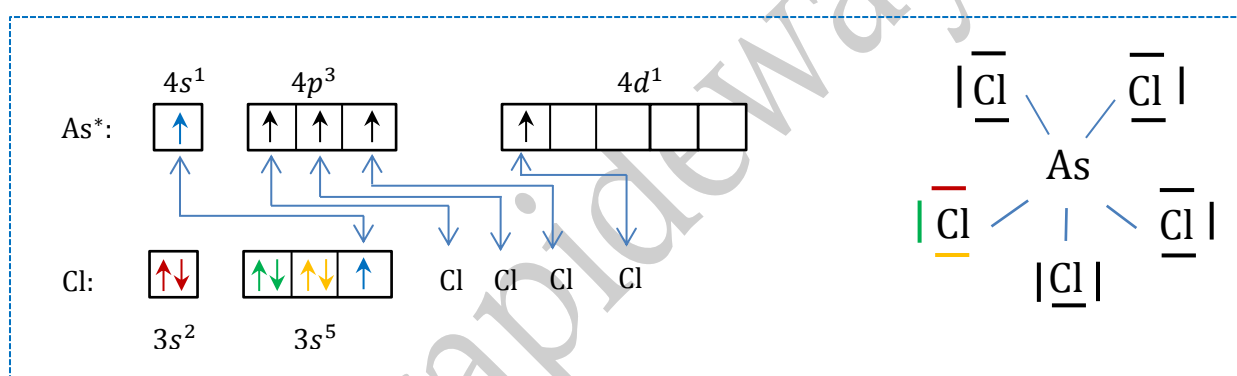
A. L'arsenic peut former avec le chlore les composés AsCl_3 et AsCl_5 . Pour chaque composé :



AsCl_3 :



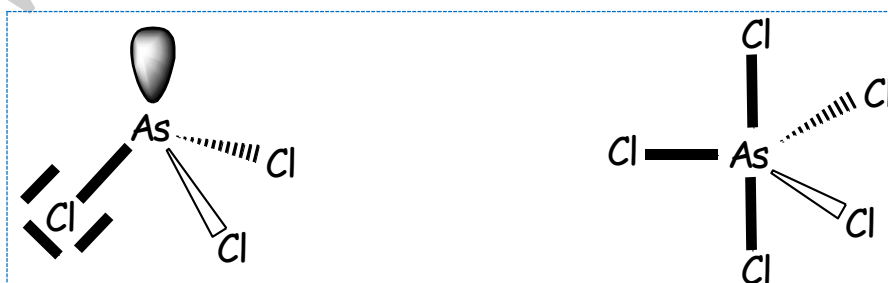
AsCl_5 :



2) AsCl_3 : On a 4 doublets autour de As (formule structurale AX_3E_1) donc la géométrie de base est tétraédrique d'où une hybridation sp^3 de As.

AsCl_5 : On a 5 doublets autour de As (formule structurale AX_5E_0) donc la géométrie de base est bipyramidale à base triangulaire. Donc As est hybridé sp^3d .

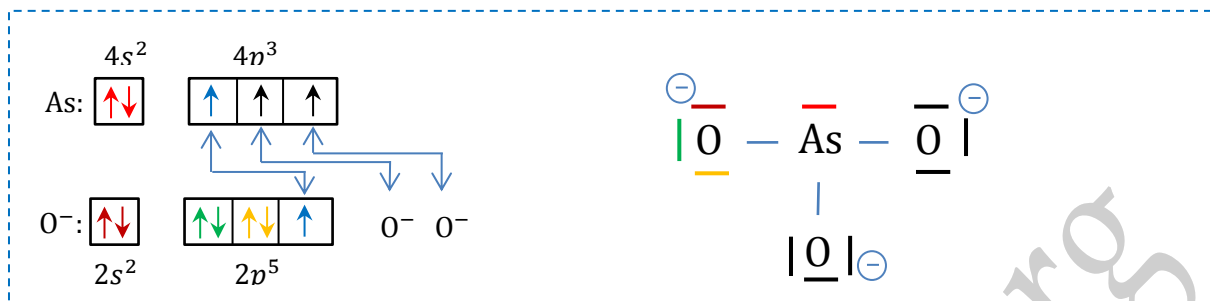
3)



4) AsH_3 peut exister car la règle de l'octet est vérifiée. Par contre AsH_5 ne peut pas exister car pour avoir la dilatation de l'octet il faut que l'atome central possède des O.A. d (ce qui est le cas pour As) et que les atomes périphériques soient plus électronégatifs que l'atome central (ce qui n'est pas le cas ici).

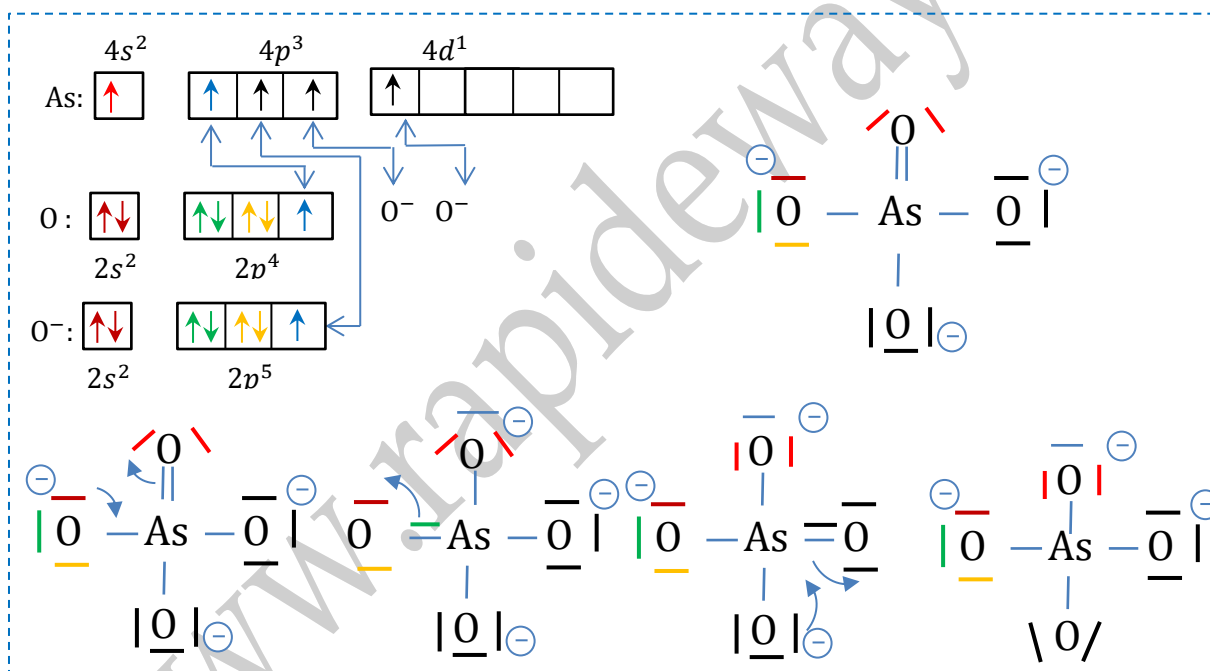
B. Avec l'oxygène, l'arsenic peut donner AsO_3^{3-} et AsO_4^{3-} .

1) AsO_3^{3-} :



Pour cet anion il n'y a pas de forme limite.

AsO_4^{3-} :



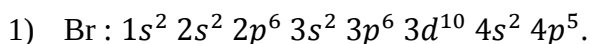
Remarque : on peut proposer une autre structure de AsO_4^{3-} en respectant la règle de l'octet pour As. Dans ce cas on n'aura pas de forme limite.

2) La forme moléculaire d' AsO_3^{3-} n'est pas régulière donc cet anion est polaire. Ou bien les centres de gravité des charges positives et des charges négatives ne sont pas confondus donc cette espèce est polaire.

La forme moléculaire de AsO_4^{3-} est tétraédrique régulière donc cet anion est non polaire.

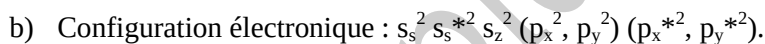
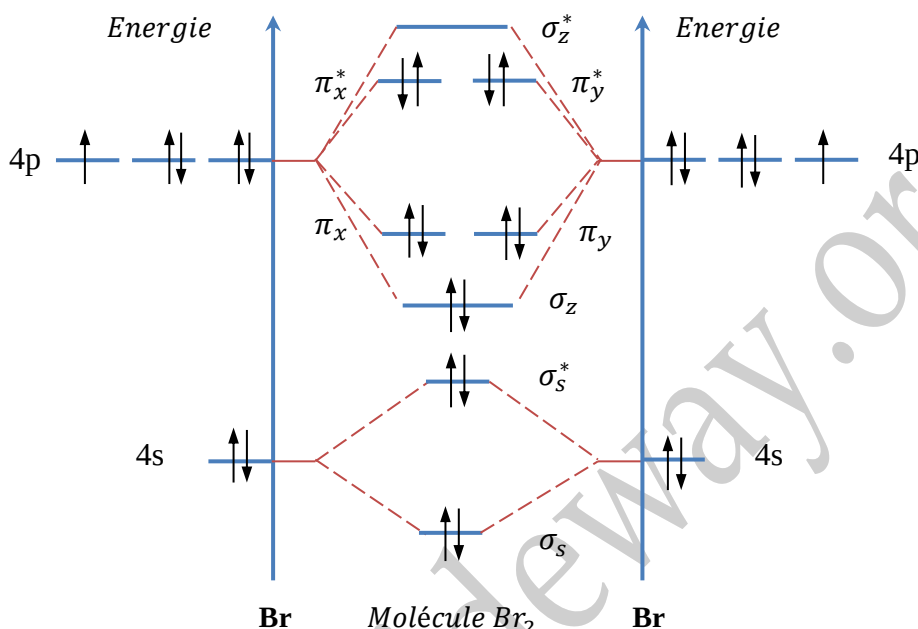
3) Les distances arsenic-Oxygène sont différentes d'un anion à l'autre car dans AsO_3^{3-} les liaisons sont simples alors que dans AsO_4^{3-} elles présentent 25% de caractère double en plus de la liaison simple.

Problème II :



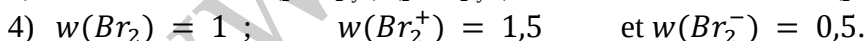
2)

a) Diagramme des O.M. de Br₂ :



c) Indice de liaison : $w_{Cl_2} = \frac{8-6}{2} = 1$ donc une liaison s.

Br₂ ne possède aucun électron célibataire elle est donc diamagnétique.



Or plus w est grand plus la liaison est stable donc l'ordre croissant de la stabilité de la liaison est : $Br_2^- < Br_2 < Br_2^+$.

5) BrF₃ et BrCl₃ peuvent exister car Br possède des O.A. d et F et Cl sont plus électronégatifs que lui. Par contre, BrI₃ ne peut pas exister car $c(I) < c(Br)$.

N.B. : la structure de Lewis de BrX₃ (X étant un halogène montre qu'il y a 5 doublets autour de Br).

Problème III:

1) $T_{eb}(AsH_3) > T_{eb}(PH_3)$ car AsH₃ est plus lourd que PH₃.

2) $T_{eb}(NH_3)$ est très élevée car dans NH₃ on a présence de la liaison hydrogène.

3) $T_{eb}(SbH_3)$ sera plus grande que celles de AsH₃ et PH₃ car sa masse molaire est plus importante, mais on ne peut pas conclure comment elle serait par rapport à NH₃.

Contrôle N 2 : Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2010-2011 FSSM
Problème I

On se propose d'étudier les liaisons dans quelques molécules de type A_2 (A est un élément de la deuxième période).

- 1) Quelles sont les orbitales moléculaires qui peuvent se former lors du recouvrement (interaction) des orbitales $s-s$, $p-p$ et $s-p$, l'axe Oz est celui de la liaison A-A.
- 2) Construire le(s) diagramme(s) des orbitaux moléculaires correspondants à ce type de molécule.
- 3) Sans établir de diagramme, donner les configurations électroniques des molécules B_2 , C_2 et N_2 .
- 4) En déduire les indices de liaison correspondants et la nature de(s) liaison(s) dans chaque cas.
- 5) On donne les valeurs des énergies de liaison suivantes : -620 , -290 et -942 kJ/mol, attribuer ces valeurs aux molécules B_2 , C_2 et N_2 .
- 6) Si l'on admet que la liaison ne dépend que des interactions évoquées en question 1), quel sera l'ordre de grandeur de l'énergie de liaison de O_2 ?
- 7) Les propriétés magnétiques de ces quatre molécules (B_2 , C_2 , N_2 et O_2) sont différentes, pourquoi ?

Données : $Z(B) = 5$; $Z(C) = 6$; $Z(N) = 7$ et $Z(O) = 8$. L'interaction $s-p$ existe si $Z \leq 7$.

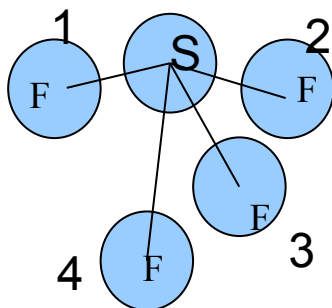
Problème II :

Le soufre S est un élément de la troisième période. Il peut former avec le fluore F les composés SF_2 , SF_4 et SF_6 .

- 1) SF_2 est le plus simple fluorure neutre du soufre.
 - a) Etablir la structure de Lewis de cette molécule.
 - b) En déduire sa géométrie de base et sa forme.
 - c) Quel est l'état d'hybridation de l'atome de soufre au sein de SF_2 ?
 - d) Cette molécule est-elle polaire ? Si oui donner l'expression de son moment dipolaire.

Comment varie l'angle a_A dans les composés AF_2 avec $A = O, S$ et Se (O, S et Se sont de la même famille avec $Z(O) < Z(S) < Z(Se)$) ?

- 2) SF_4 est très utilisé en industrie chimique et pharmaceutique.
 - a) Etablir la structure de Lewis de ce système.
 - b) Quel est l'état d'hybridation de S dans SF_4 ?
 - c) La forme de SF_4 est donnée ci-dessous, calculer en Debye les moments dipolaires m_1 et m_2 des liaisons $S-F^1$ et $S-F^3$.



Longueur de liaison : $d(S-F^1) = d(S-F^2) = 1,646 \text{ \AA}$ et $d(S-F^3) = d(S-F^4) = 1,545 \text{ \AA}$.

Angles : $\alpha_1 = (\angle SF^1F^2) = 173^\circ$ et $\alpha_2 = (\angle SF^3F^4) = 101,6^\circ$.

Charges : $q(F^1) = q(F^2) = -0,895 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $q(F^3) = q(F^4) = -0,7612 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

- d) En déduire les moments dipolaires $\mathbf{m}(SF^1F^2)$ et $\mathbf{m}(SF^3F^4)$ et le moment dipolaire global $\mathbf{m}(SF_6)$ sachant que les bissectrices des angles α_1 et α_2 sont confondues.
- 3) En présence du difluore F_2 , SF_4 donne SF_6 , quelle géométrie aura ce dernier et quel type d'hybridation adoptera l'atome central S.
- 4) Pourrait-on avoir les composés du genre OF_4 ou OF_6 ? Pourquoi ?

Données : $Z(F) = 9$; $Z(O) = 8$; $Z(S) = 16$; $Z(Se) = 34$;

$1 \text{ D} = 0,333 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$; $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$.

Corrigé de contrôle N 2 : Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2010-2011 FSSM

Problème I :

- 1) Entre O.A. de type s on ne peut avoir que le recouvrement axial de même entre une O.A. s et une O.A. p. Par contre, entre O.A. de type p on peut avoir deux types de recouvrement : un recouvrement axial ou un recouvrement latéral.

N.B. : le recouvrement axial donne toujours les liaisons σ et le recouvrement latéral donne les liaisons π .

Donc le recouvrement entre deux O.A. s donne deux O.M. σ_s et σ_s^* . Le recouvrement entre une O.A. s et une O.A. p donne les O.M. σ_{sp} et σ_{sp}^* . D'après les données on fixe l'axe de rapprochement des deux O.A. p donc : le recouvrement p_z-p_z donne σ_z et σ_z^* ; le recouvrement p_x-p_x donne π_x et π_x^* et le recouvrement p_y-p_y donne π_y et π_y^* .

2)

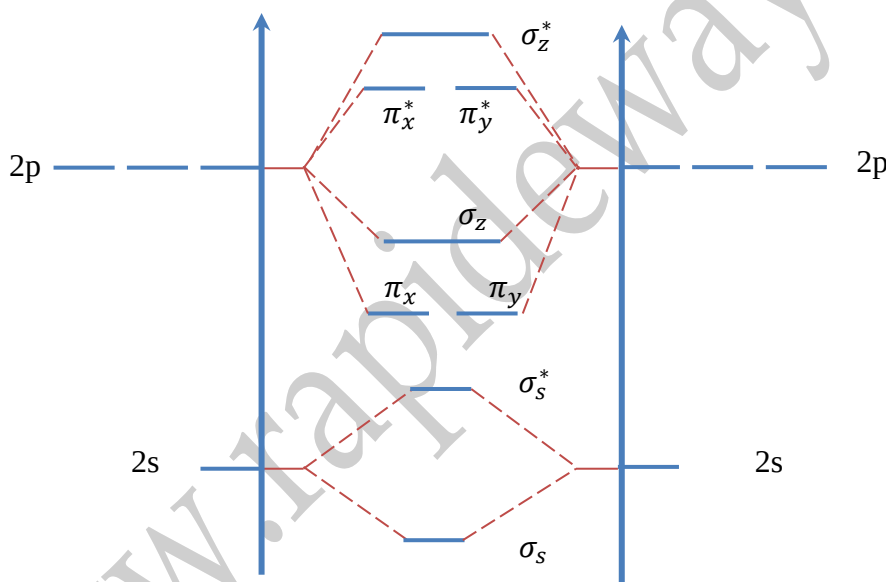


Diagramme avec interaction s - p

Remarque : le diagramme est simplifié. En effet, il y a interaction entre O.A. s et O.A. p.

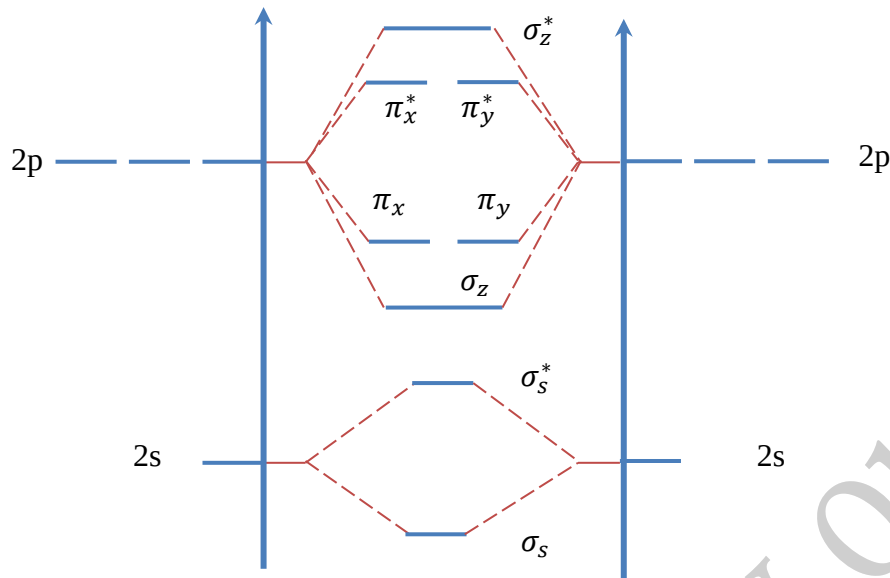


Diagramme sans interaction $s - p$

3)

B_2 : 6 e- donc : $\sigma_s^2 \sigma_s^{*2} (\pi_x, \pi_y)^2$ ou $\sigma_s^2 \sigma_s^{*2} (\pi_x^1, \pi_y^1)$.

C_2 : 8 e- donc : $\sigma_s^2 \sigma_s^{*2} (\pi_x^2, \pi_y^2)$ ou $\sigma_s^2 \sigma_s^{*2} (\pi_x, \pi_y)^4$.

N_2 : 10 e- donc : $\sigma_s^2 \sigma_s^{*2} (\pi_x^2, \pi_y^2) \sigma_z^2$ ou $\sigma_s^2 \sigma_s^{*2} (\pi_x, \pi_y)^4 \sigma_z^2$.

4) B_2 : $\omega_{B_2} = \frac{4-2}{2} = 1$ donc 1 liaison σ ou 2 demi liaisons π .

C_2 : $\omega_{C_2} = \frac{6-2}{2} = 2$ donc 2 liaisons π .

N_2 : $\omega_{N_2} = \frac{8-2}{2} = 3$ donc 1 liaison σ et 2 liaisons π .

5) Plus ω est élevé plus l'énergie de dissociation (formation) de la liaison est grande (faible).

$\omega_{B_2} < \omega_{C_2} < \omega_{N_2}$ donc : $E_{B-B} > E_{C=C} > E_{N \equiv N}$.

D'où : $E_{B_2} = -290 \text{ kJ/mol}$; $E_{C_2} = -620 \text{ kJ/mol}$; $E_{N_2} = -942 \text{ kJ/mol}$.

6) O_2 : $\omega_{O_2} = \frac{8-4}{2} = 2$ même indice de liaison que C_2 , donc E_{O_2} sera de même ordre de grandeur que E_{C_2} . d'où : $E_{B-B} > E_{O=O} > E_{N \equiv N}$.

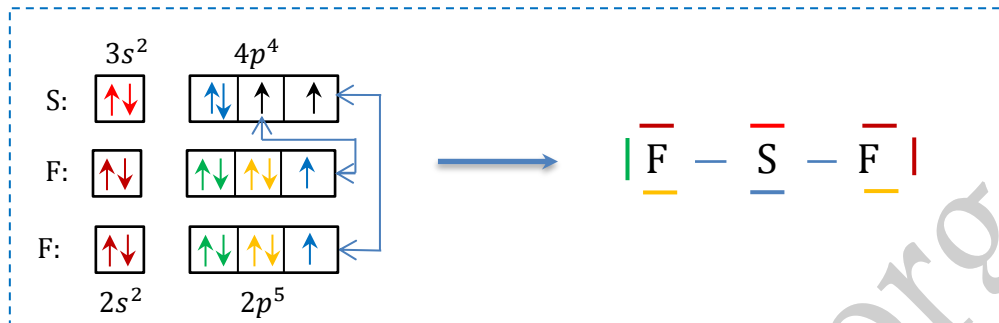
7) B_2 et O_2 sont paramagnétiques (2 e- célibataires).

C_2 et N_2 sont diamagnétiques (pas d'e- célibataire).

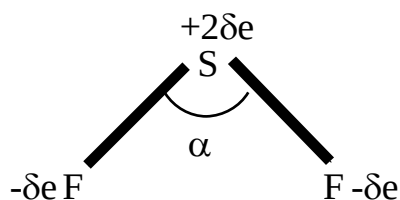
Problème II :

1)

a) Structure de Lewis de SF_2 :



- b) On a 4 doublets autour de S (formule structurale AX_2E_2) donc la géométrie de base est tétraédrique. Comme il y a 2 doublets libres, la forme de la molécule est coudée.
- c) Comme la géométrie de base est tétraédrique, l'état d'hybridation du soufre est sp^3 .
- d) Les atomes qui entourent le soufre sont identiques mais la forme de la molécule n'est pas régulière donc la molécule SF_2 est polaire.

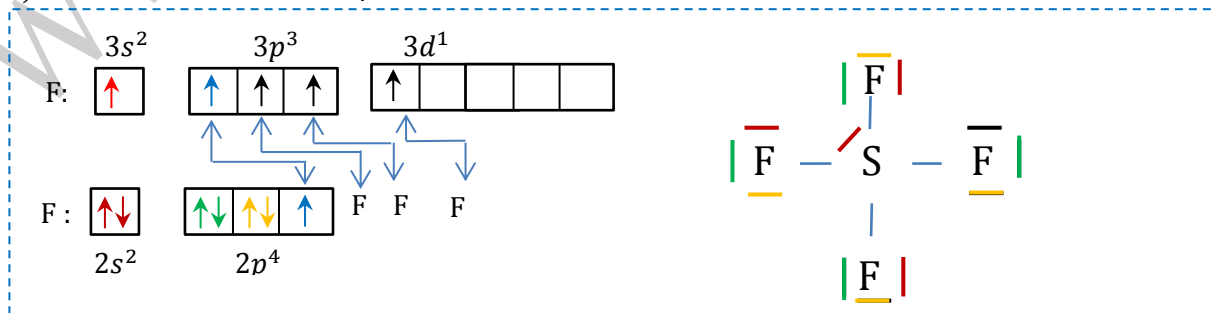


$$\mu = 2d_{\text{S-F}}\delta e \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ ou bien } \mu = \sqrt{2(d_{\text{S-F}}\delta e)^2(1 + \cos\alpha)}$$

- e) L'électronégativité décroît de O à Se donc le doublet de la liaison A-F va s'éloigner de A en passant de OF_2 à SeF_2 . Ceci s'accompagne avec la diminution de la force de répulsion entre les doublets des deux liaisons de là on déduit : $\alpha_{\text{O}} > \alpha_{\text{S}} < \alpha_{\text{Se}}$.

2)

a) Structure de Lewis de SF_4 :



b) 5 doublets autour de S (formule structurale AX_4E_1), donc la géométrie de base est bipyramidale à base triangulaire d'où un état d'hybridation de S sp^3d .

c) $\mu = qxd$ donc : $\mu_1 = 0,895 \cdot 10^{-19} \times 1,646 \cdot 10^{-29} \text{ Cm soit } 4,4 \text{ D}$

$$\mu_2 = 0,7612 \cdot 10^{-19} \times 1,545 \cdot 10^{-10} = 1,176 \cdot 10^{-29} \text{ Cm soit } 3,5 \text{ D}$$

$$\mu(F^3SF^4) = 2\mu_1 \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = 2 \times 4,4 \times \cos\left(\frac{173}{2}\right) = 0,54 \text{ D}$$

$$\mu(F^3SF^4) = 2\mu_2 \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = 2 \times 4,4 \times \cos\left(\frac{101,6}{2}\right) = 4,42 \text{ D}$$

Bissectrices des angles α_1 et α_2 confondues ceci veut dire que $\mu(SF_4) = \mu_1 + \mu_2$.

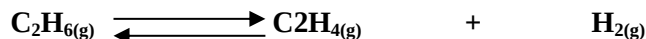
Donc : $\mu(SF_4) = \mu_1 + \mu_2 = 0,54 + 4,42 = 4,96 \text{ D}$.

3) l'établissement de la structure de Lewis de SF_6 montre que S est entouré de 6 doublets (formule structurale AX_6E_0) donc géométrie de base = forme de la molécule est bipyramidale à base carrée (ou octaédrique). Donc l'état d'hybridation de S est sp^3d^2 .

4) OF_4 et OF_6 ne peuvent exister car O n'a pas d'O.A. d.

Contrôle N 2 : Chimie générale -Atomistique - Filière SMPC/SMA 2008-2009 FSSM
I- Équilibres chimiques : déshydrogénation de l'éthane.

On considère la réaction de déshydrogénation de l'éthane à **1200 K** et sous **P = 1 atm** :



- 1) Etablir l'expression de K_c en fonction de K_p et en déduire sa valeur.
- 2) Etablir l'expression de K_p en fonction de a (coefficient de dissociation de C_2H_6). Déterminer la valeur de a .
- 3) Discuter, selon la loi de Lechatelier, l'influence :
 - a) d'une diminution isotherme de la pression totale,
 - b) d'une introduction isotherme et isochore de C_2H_4 .
- 4) Sous quelle pression faut-il réaliser cet équilibre pour que a soit égal à **0,95**. Ce résultat est-il en accord avec la question 3-a ?
- 5) Calculer la masse molaire du mélange gazeux à l'équilibre.

Données :

$$K_p = 6,24 \quad ; R = 0,082 \text{ L.atm/mol.K.}$$

Masses molaires atomiques (g/mol) : C : 12 ; H : 1.

II- Cinétique : décomposition du pentoxyde de diazote.

L'expérience montre que la réaction suivante, réalisée à $T_1 = 160^\circ\text{C}$, suit une cinétique d'ordre 1.



- 1) Etablir l'expression liant $[\text{N}_2\text{O}_5]$, $[\text{N}_2\text{O}_5]_0$ et le temps t .
- 2) Sachant que $t_{2/3} = 3\text{s}$, calculer la constante de vitesse k_1 de cette réaction.
- 3) Calculer $t_{1/2}$. Quelle sera sa valeur si la concentration initiale en N_2O_5 est triplée ?
- 4) A quelle température T_2 doit-on effectuer cette réaction pour que **95%** de N_2O_5 initial soit décomposé au bout de 3s.

Données : $R = 8,31 \text{ J/mol.K}$; énergie d'activation $E_a = 103 \text{ kJ/mol}$.

III- Thermodynamique : combustion d'alcane

Les réactions considérées sont supposées totales et ont lieu dans les **conditions standard**.

- 1) Ecrire les réactions de combustion du méthane (CH_4) et de l'éthane (C_2H_6) gazeux.
- 2) Calculer les variations d'enthalpies de ces deux réactions à $T = 25^\circ\text{C}$ (on notera $\Delta_r H^\circ_1$ pour CH_4 et $\Delta_r H^\circ_2$ pour C_2H_6).

- 3) Déterminer les variations d'enthalpies de ces réactions à $T = 90\text{ }^{\circ}\text{C}$ (on notera $D_f H^{\circ}_3$ pour CH_4 et $D_f H^{\circ}_4$ pour C_2H_6). Quelle(s) est (sont) la (les) donnée(s) manquante(s) si on veut calculer ces enthalpies à T supérieure à $100\text{ }^{\circ}\text{C}$?
- 4) La combustion, à $T = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$, d'une masse $m = 10\text{ g}$ d'un mélange de CH_4 et C_2H_6 dégage 525 kJ ($DH^{\circ} = -525\text{ kJ}$). Calculer le pourcentage en masse de chacun de ces hydrocarbures.

Données :

	$\text{CH}_{4(g)}$	$\text{C}_2\text{H}_{6(g)}$	$\text{CO}_{2(g)}$	$\text{H}_2\text{O}_{(l)}$	$\text{O}_{2(g)}$
$D_f H^{\circ}_{298K} \text{ (kJ/mol)}$	-74,77	-84,51	-393,51	-285,83	0
$C_p \text{ (J/mol.K)}$	35,31	52,63	37,11	75,29	29,66

Masses molaires atomiques (g/mol) : C : 12 ; H : 1

Extraits d'exercices des examens de Chimie générale-Atomistique-Filière SMPC/SMA FSSM

Exercice 1 :

On se propose d'étudier par la méthode des O.M. la molécule diatomique B_2 (numéro atomique du bore $Z=5$).

- Quelles sont les orbitales de valence utilisées ?
- Combien y a-t-il d'électrons de valence dans cette molécule ?
- Sachant que la différence d'énergie entre les niveaux s et p est faible (interactions s-p ou $\sigma_s - \sigma_p$), représenter le diagramme énergétique correspondant.
- Quel est le nombre de liaisons ?
- Quelles sont les propriétés magnétiques de cette molécule ?

(Juin 1979)

Exercice 2 :

On considère l'ion AlH_4^- , l'aluminium ayant pour numéro atomique $Z=13$.

- En utilisant les règles de Gillespie, préciser la géométrie de cet ion.
- Quel serait l'état d'hybridation de l'aluminium ?
- L'hydrogène ayant une électronégativité de 2,1 et l'aluminium de 1,8 dans l'échelle de Pauling, en déduire le degré d'oxydation de chacun d'eux dans cet ion.

(Juin 1979)

Exercice 3 :

1)

- En utilisant la méthode des O.M., représenter le diagramme énergétique de la molécule O_2 sachant qu'il n'y a pas d'interaction $\sigma_s - \sigma_p$ ou s-p (la différence d'énergie entre les O.A. 2s et 2p de l'oxygène est importante) ; $Z=8$ pour l'oxygène.
- En déduire les propriétés magnétiques et le nombre de liaisons de cette molécule.
- Quelles seraient les propriétés magnétiques et le nombre de liaisons de l'ion O_2^{--} ?
- Soit la molécule H_2O_2 . Donner la représentation de Lewis de cette molécule.
- En déduire le degré d'oxydation de l'oxygène. (Les trois parties de cette question ne sont pas indépendantes).

2) On considère les composés NH_4^+ , BF_4^- et SF_4 . $Z=1$ pour H, 5 pour B, 7 pour N, 9 pour F et 16 pour S.

- Donner la représentation de Lewis pour ces trois espèces (On supposera que toutes les liaisons sont simples).
- En déduire leurs géométries en précisant la valeur approximative des angles de liaison.
- Calculer les différents degrés d'oxydation sachant que l'on a, par électronégativité décroissante, F, N, S, B et H.

Exercice 4 :

1)

- a) Représenter le diagramme des O.M. de la molécule NO, sachant que l'oxygène est plus électronégatif que l'azote.

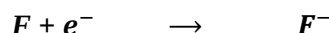
On admettra qu'il y a interaction s-p.

En déduire le nombre de liaisons et propriétés magnétiques de ce composé.

- b) Donner une représentation de Lewis de cette molécule. Quelles sont les formes limites possibles ? Quelle est la plus probable ? Justifier votre résultat à partir du diagramme précédent.

On rappelle que $Z=8$ pour l'oxygène.

- 2) Calculer l'affinité électronique du fluor en précisant son signe ; on utilisera pour cela le fait que la réaction :



On rappelle que la constante d'écran est de 0,35 par électron appartenant à la couche n (sauf pour la couche $n=1$ où elle est de 0,31) de 0,85 par électron appartenant à la couche $n-1$.

$Z=9$ pour le fluor.

- 3) On considère la molécule d'éthylène C_2H_4 .

Donner la représentation de Lewis de cette molécule ; en déduire sa géométrie en utilisant les règles de Gillespie.

Quel serait l'état d'hybridation de chacun des atomes de carbone dans ce composé ? En déduire une représentation de cette molécule en utilisant les orbitales hybrides et orbitales de type p.

Juin(1980)

Exercice 5 :

- 1) On considère la molécule de formaldéhyde H_2CO .

- a) Donner sa représentation de Lewis,
 b) Déduire sa géométrie en utilisant les règles de Gillespie.
 c) Quel serait l'état d'hybridation des atomes de C et O dans ce composé ; en déduire sa représentation en utilisant les orbitales hybrides et les orbitales de type p.

$Z=1$ pour H, 8 pour O, 6 pour C.

- 2) On considère la molécule BeH_2

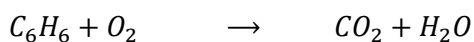
Be : $Z=4$; H : $Z=1$.

- a) Quelles sont les orbitales de valence utilisées pour former cette molécule ?
 Donner leurs combinaisons possibles.
 b) Sachant que l'hydrogène est plus électronégatif que le beryllium, représenter le diagramme énergétique des O.M. de cette molécule.

(Septembre 1980).

Exercice 6 :

a) Equilibrer la réaction suivante :



b) A 25°C. l'enthalpie de combustion d'une mole de benzène liquide (C_6H_6) pour donner de l'eau et du gaz carbonique dans leur état standard est :

$\Delta H^\circ_l = -780,98$ kcal /mole. Dans les même conditions, l'enthalpie de combustion d'une mole de benzène gazeux pour donner de l'eau et du gaz carbonique dans leur état standard est $\Delta H^\circ_2 = -789,08$ kcal. /mole.

-Quelle est l'enthalpie de vaporisation du benzène à 25°C ?

(Juin 1979).

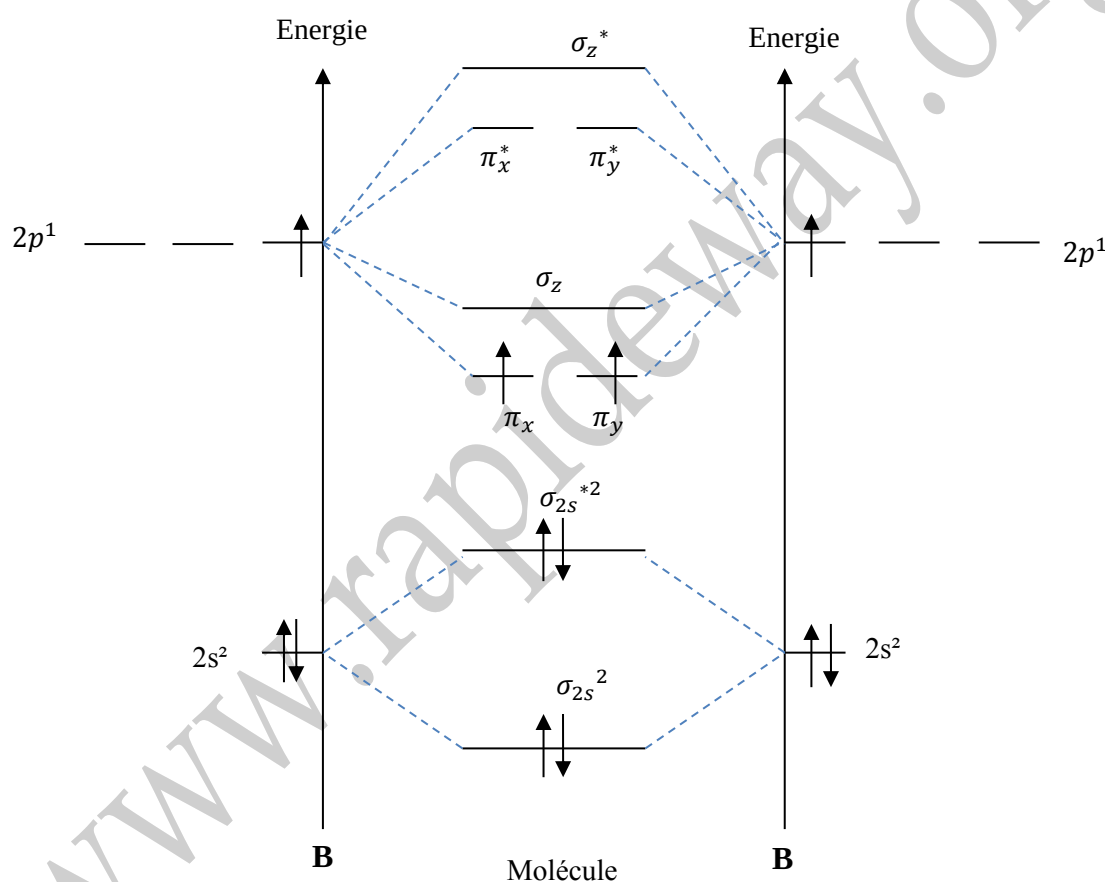
Corrigé d'exercices des examens de chimie générale-Atomistique-Filière SMPC/SMA FSSM

FSSM - Extrait de Contrôle Année : Juin 1979

Exercice 1 :

Configuration électronique de B (bore) $Z=5 : 1s^2 2s^2 2p^1$

- Les orbitales de valence intervenant dans la formation de la molécule B_2 sont $2s$ et $2p$
- La molécule B_2 possède 6 électrons de valence, car chaque atome de Bore met en jeu trois e^- de valence.
- En tenant compte de faible différence d'énergie entre les niveaux s et p le diagramme de B_2 se présente



Les électrons de valence de la molécule B_2 sont répartis sur les orbitales molécules OM de la manière suivant : $\sigma_{2s}^2 \sigma_{2s}^{*2} (\pi_x \pi_y)^2$ ou $\sigma_{2s}^2 \sigma_{2s}^{*2} (\pi_x^1, \pi_y^1)$

- Le nombre liaisons w est : $w = \frac{1}{2} (n - n^*)$

$$w = \frac{2+2-2}{2} = 1 \text{ liaison } (\pi)$$

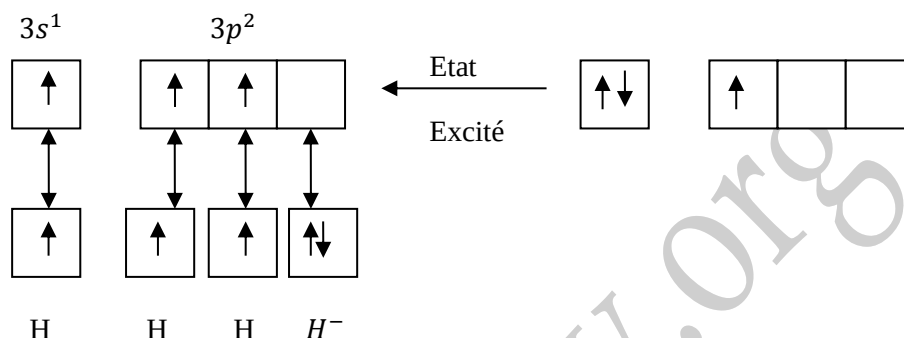
La molécule B_2 présente une liaison $\pi |B - B|$

- B_2 est paramagnétique puisqu'elle possède 2 électrons célibataires.

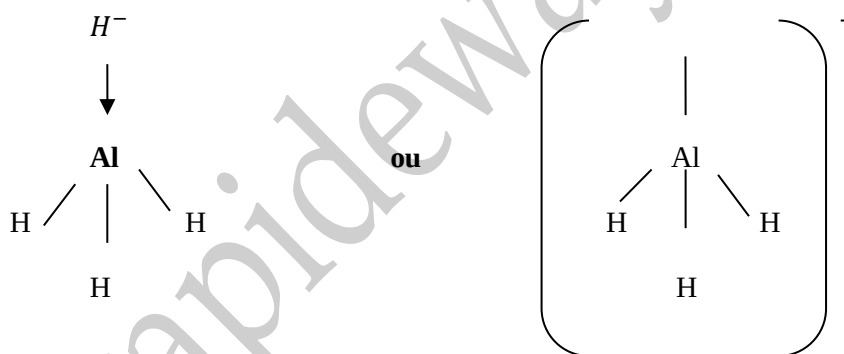
FSSM - Extrait de Contrôle Année : Juin 1979

Exercice 2 :

La configuration électronique d'Al : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$



Formule de Lewis :



AlH_4^- est de la forme : AH_4 D'après la règle de Gillespie la géométrie de AlH_4^- est : Tetraédre régulier.

- Pour former AlH_4^- l'atome de l'Al engage quatre orbitales atomiques (OA) hybrides identiques, obtenues par combinaison de son OA 3s et de ses trois OA 3p
- donc hybridation sp^3 . Ce résultat confirmé par la répartition électronique établie par la règle de Gillespie
- L'hydrogène est plus électronégatif que l'Aluminium donc son degré d'oxydation égale a -I $\Rightarrow$ degré d'oxydation de Al est : +III

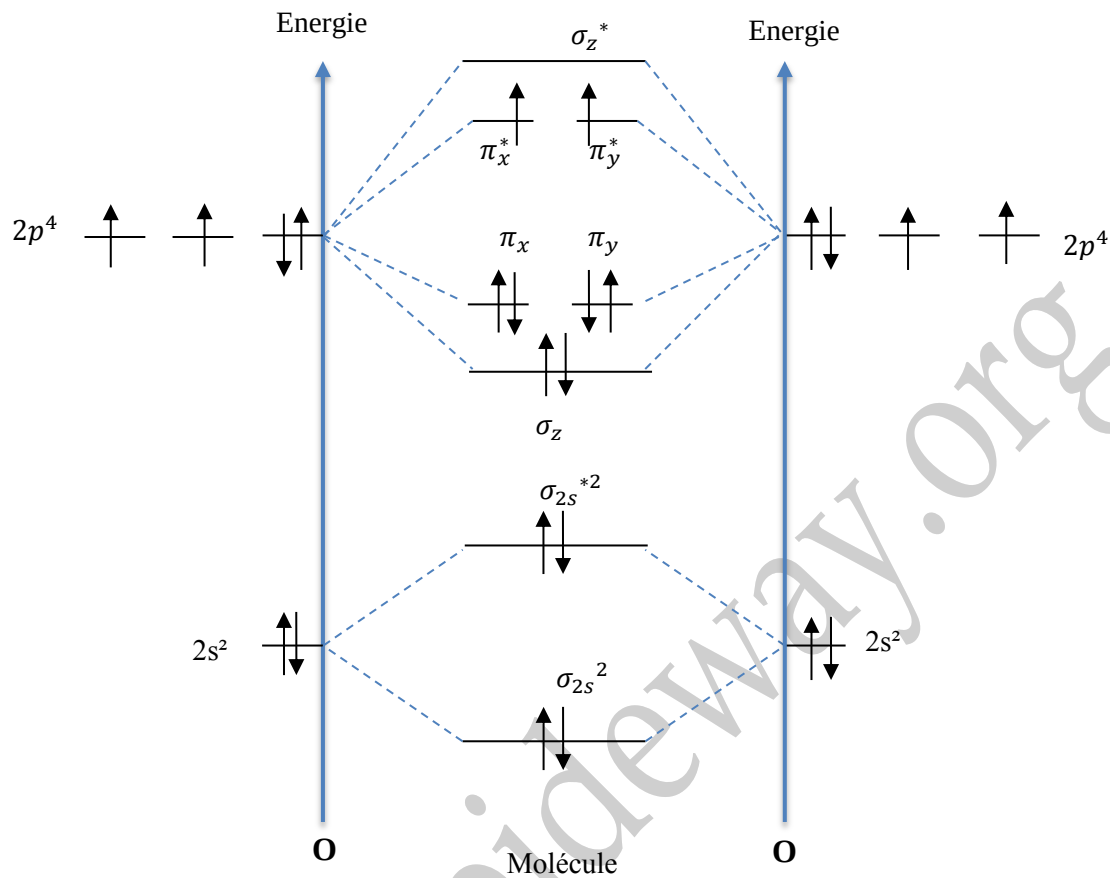
FSSM - Extrait de Contrôle Année : Septembre 1979

Exercice 3:

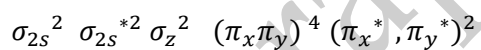
1.

- La configuration électronique de l'oxygène ($Z=8$) : $1s^2 2s^2 2p^4$
Les électrons des OA de valence 2s et 2p sont les seuls à participer à la formation de la molécule O_2 ; Il n'y a pas d'interaction s-p car il y a une grande différence d'énergie entre les niveaux 2s et 2p.

Le diagramme de O_2 est donc :

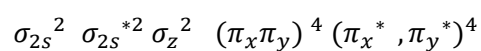


La configuration électronique de La molécule O_2



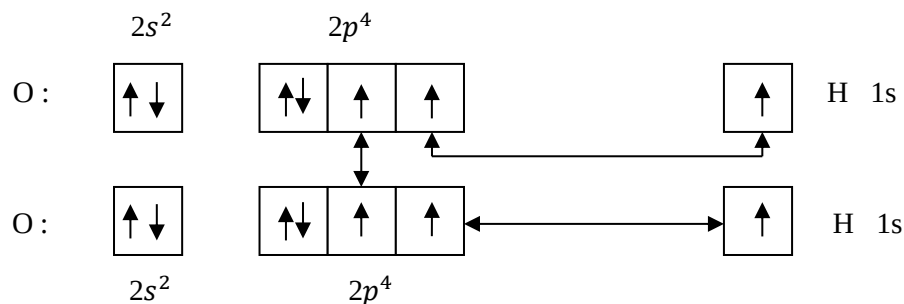
- Le nombre de liaison $w = \frac{n-n^*}{2} = \frac{8-4}{2} = 2$
 2 liaisons : $\begin{cases} 1 \text{ liaison } \sigma \\ 1 \text{ liaison } \pi \end{cases}$
- Puisque la molécule possède 2 électrons célibataire O_2 a des propriétés paramagnétiques.
 b) L'ion O_2^{2-} a deux électrons supplémentaire par rapport à la molécule O_2 ces deux e^- seront places sur les niveaux antliants π_x^*, π_y^*

$\Rightarrow$ La configuration électronique de O_2^{2-} :

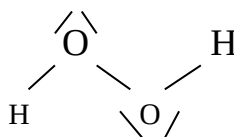


$\Rightarrow O_2^{2-}$ a des propriété diammagnétique et on a $w = \frac{8-6}{2} = 1$ une liaison 6

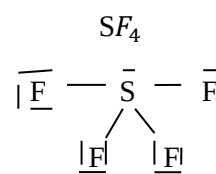
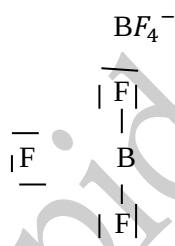
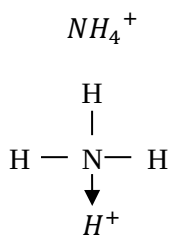
c)



$\Rightarrow$ Structure de Lewis :



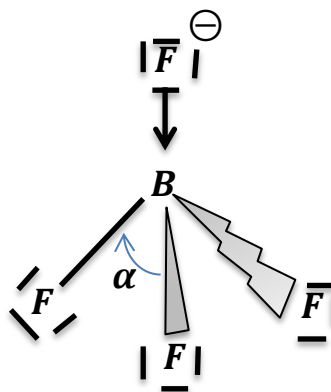
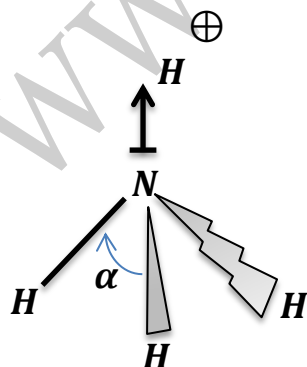
On a O est la plus électronégatif que l'hydrogène (H) le doublet d'électron de la liaison H-O est attribué à O par contre le doublet O-O est partagé de façon équilibre donc le degré d'oxydation de O est $-I$



2.

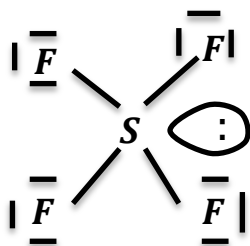
a)

b) NH_4^+ et BF_4^- ont chacune quatre paires liantes autour de l'atomes centraux N et $\text{B} \Rightarrow$ géométrie tétraédriques (Tétraèdres régulier)



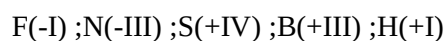
$$\alpha = \alpha' = 109^\circ 28'$$

SF_4 a 4 liaisons liants et 1 doublet $\Rightarrow$ géométrie bipyramide à base triangulaire



La molécule SF_4 est entouré par quatre paires liantes et une paire libre, ces cinq paires forment donc une bipyramide à base triangulaire. La paire libre occupe une position équatoriale.

- c) En tenant compte de l'ordre d'électronégativité donné
 $\Rightarrow$ Les degrés d'oxydation des différents éléments :

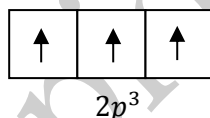
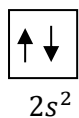


FSSM - Extrait de Contrôle Année : juin 1980

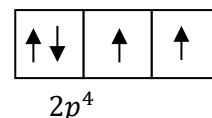
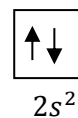
Exercice 4:

On a pour N (Z=7) et O (Z=8) $\Rightarrow$ configuration électronique

N: $1s^2 2s^2 2p^3$



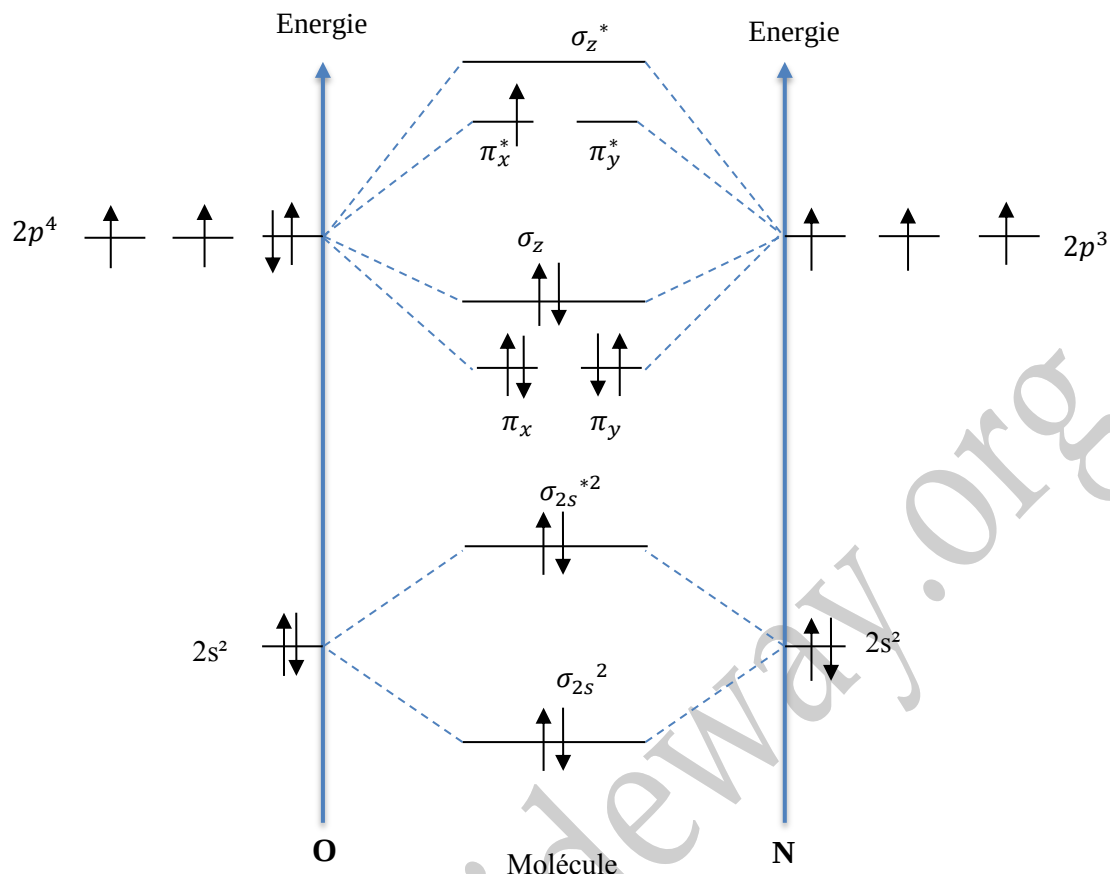
O: $1s^2 2s^2 2p^4$



- a) Les orbitales atomiques de valence sont 2s et 2p, il y a présence d'interaction s-p dans la molécule

NO $\Rightarrow$ le diagramme moléculaire est donc :

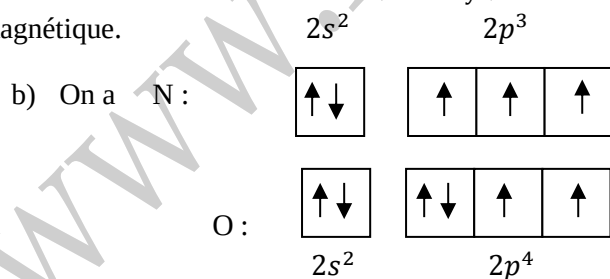
$$Z(O) > Z(N) \Rightarrow E(N) > E(O)$$



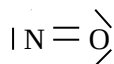
Configuration électronique de la molécule ON :

$\sigma_{2s}^2 \sigma_{2s}^{*2} (\pi_x \pi_y)^4, \sigma_z^2 (\pi_x^*, \pi_y^*)^1 \Rightarrow w = \frac{8-3}{2} = 2,5 \Rightarrow 1 \text{ liaison } \sigma \text{ et } 1,5 \text{ liaisons } \pi$

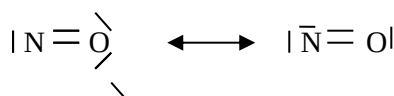
L'existence d'un électron (π_x^*, π_y^*) donne à la molécule NO une propriété paramagnétique.



$\Rightarrow$ Formule de Lewis :



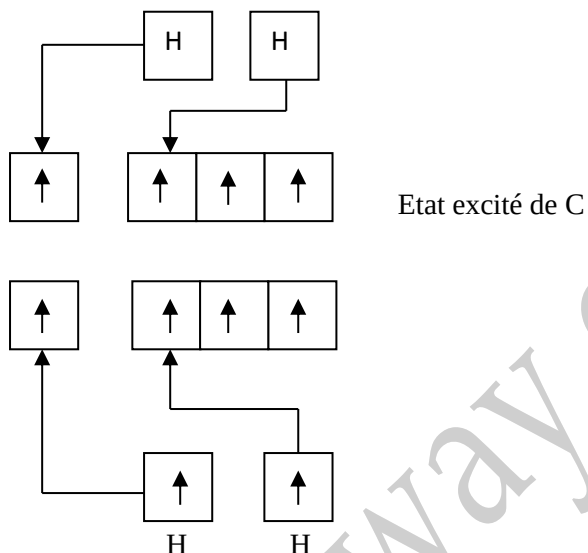
Les formes limites possible de cette molécule sont :



- La forme limite $\text{N} \equiv \text{O}$ est plus probable que $\text{N} = \text{O}$ car d'après le diagramme énergétique de NO, l'électron célibataire est plus proche des orbitales 2p de l'azote que des orbitales 2s de l'oxygène.

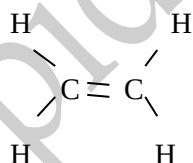
On peut aussi justifier à résultat par le fait que O est plus électronégatif que N.

III. On a :



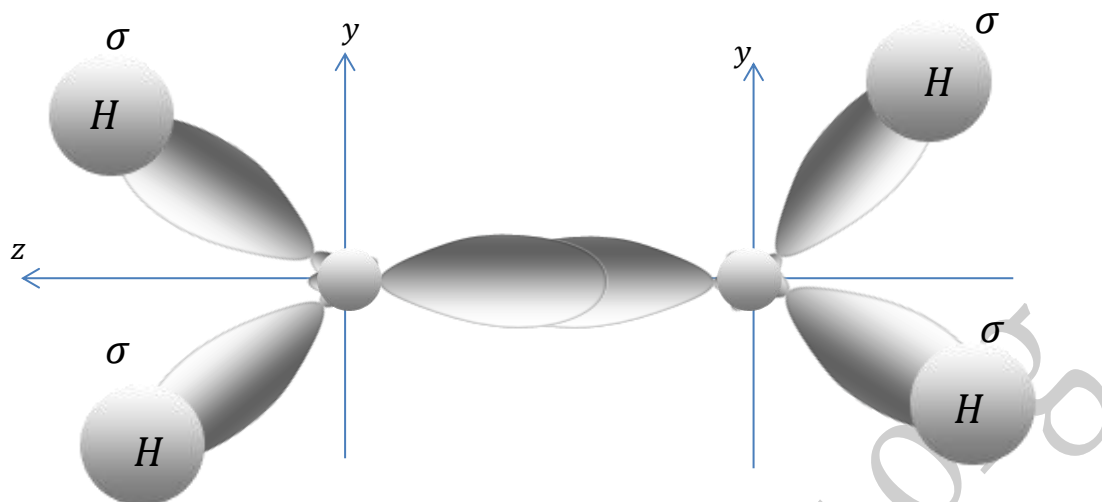
Seule l'excitation de carbone qui peut expliquer la formation de l'atome C_2H_4

⇒ Representation de Lewis

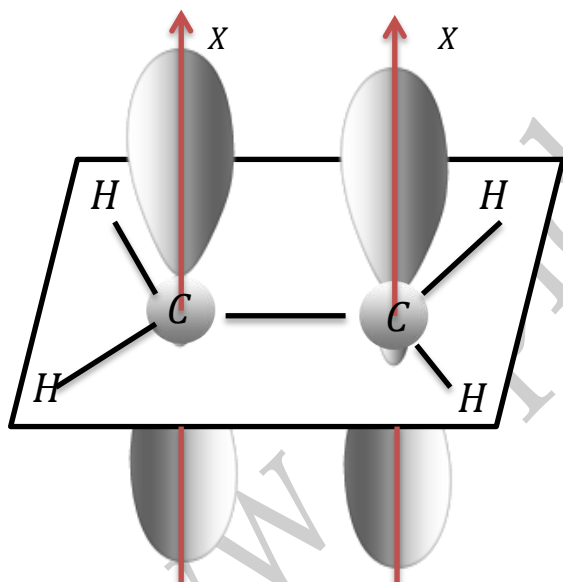


Dans la molécule C_2H_4 , chaque atome de carbone est entouré de 3 paires liantes de (double liaison est considérée comme une paire liante) donc cette molécule est triangulaire plane par rapport à chaque atome de C.

Les atomes de carbone sont hybridés sp^2



- Le recouvrement latérale des OA P_2 des atomes de carbone lie à une liaison σ , qui assure la planiété de la molécule .

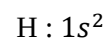
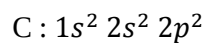
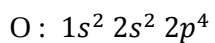


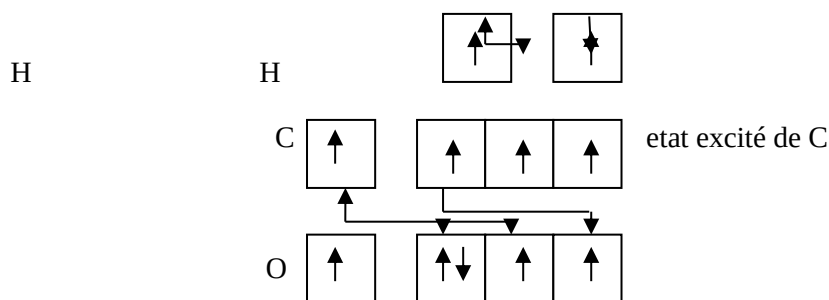
FSSM – Corrigé - Extrait de Contrôle Année : Septembre 1980

Exercice 5

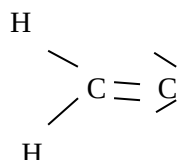
I.

- a) Les configurations électroniques des différents éléments de la molécule H_2CO

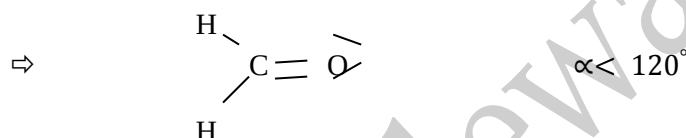




La structure de Lewis :

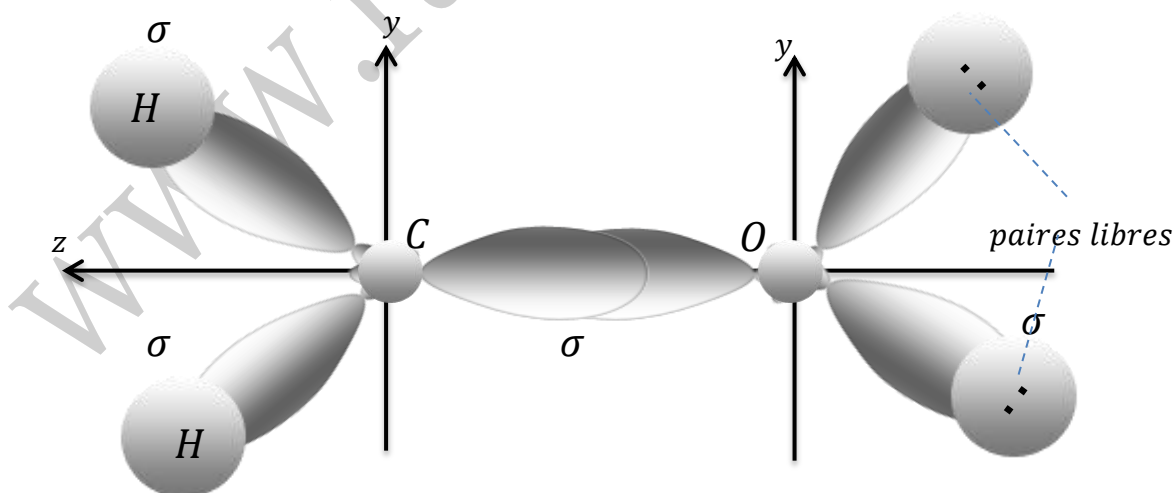


- b) L'atome centrale C est entouré par 3 paires liantes la double liaison compte pour une paire liante.

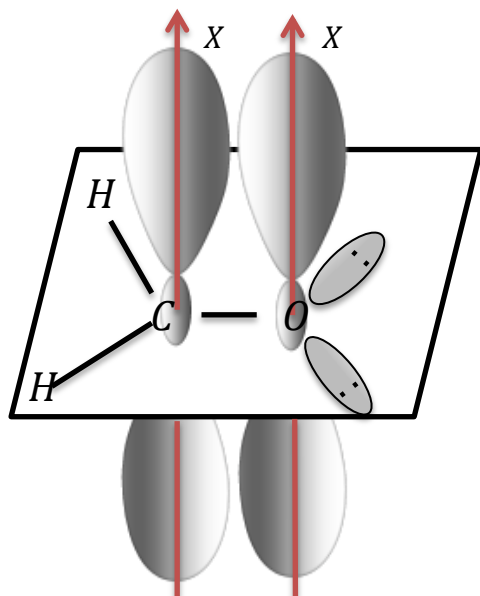


- c) Chacun des atomes C et O de la molécule H_2CO contribue par ces trois orbitales hybrides et son orbitale de type p ($2p_x$)

Les orbitales hybrides sont formées à partir d'une orbitale atomique (OA) $2s$ et deux OA $2p$ $\Rightarrow$ les deux atomes O, et C sont hybridés sp^2

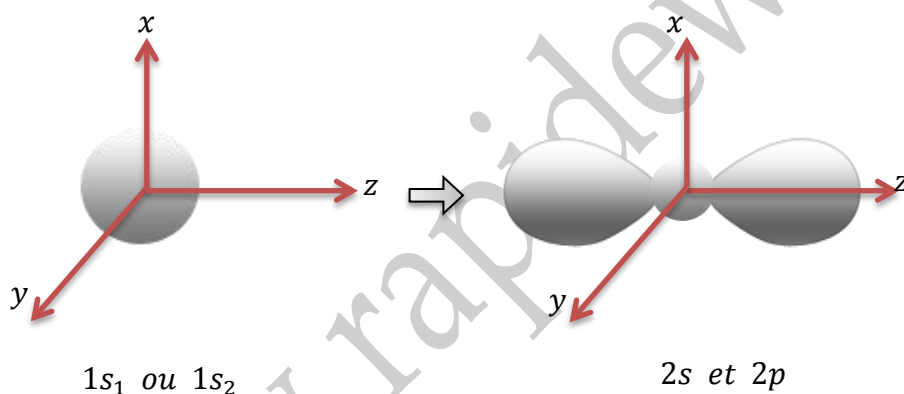


Les trois orbitales hybrides du carbone forment 3 liaisons σ dont deux avec l'hydrogène et une avec OH (hybride) de O, la liaison π provient du recouvrement latéral des OA $2p_x$ des atomes C et O



II.

a) Les orbitales de valence utilisées pour former la molécule linéaire BeH_2 sont $1s_1 1s_2$



Les différentes combinaisons possibles de ces orbitales atomiques (OA) sont :

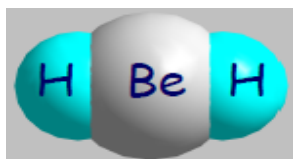
$$\sigma_s = a_1 2s + b_1 (1s_1 + 1s_2)$$

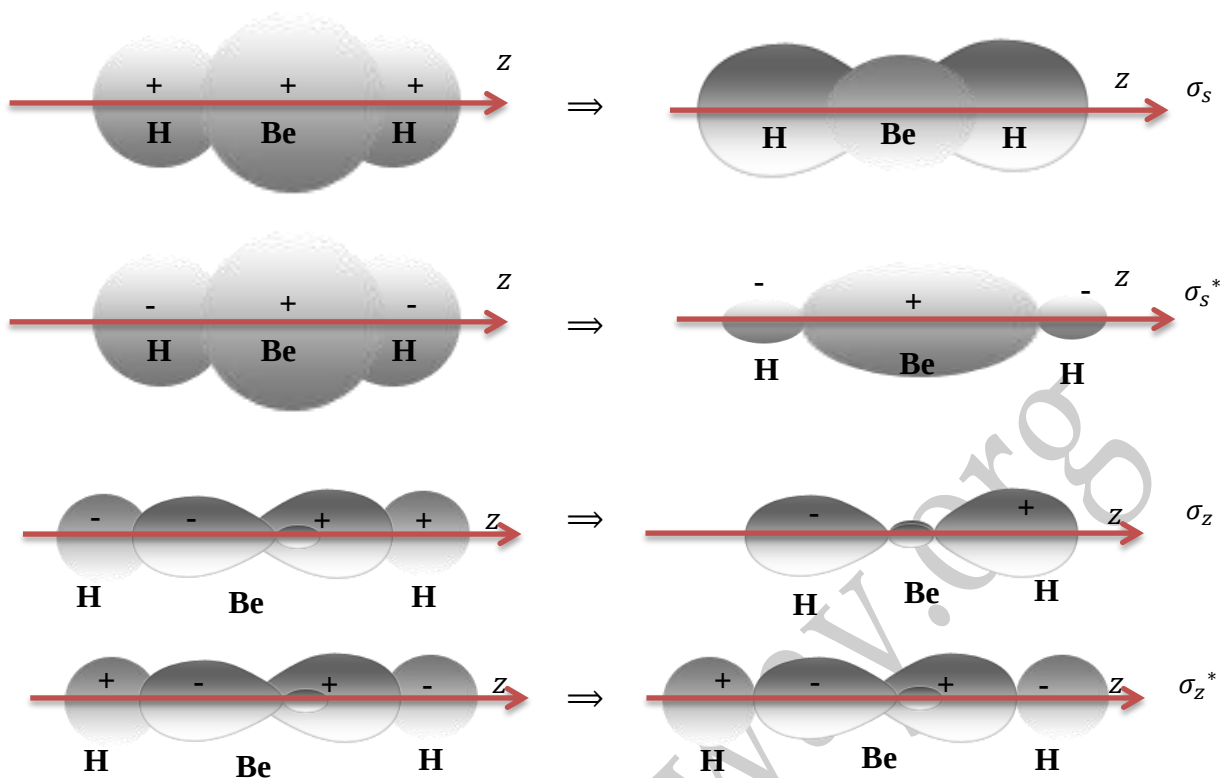
$$\sigma_s^+ = a_2 2s - b_2 (1s_1 + 1s_2)$$

$$\sigma_z = a_3 2p_z + b_3 (-1s_1 + 1s_2)$$

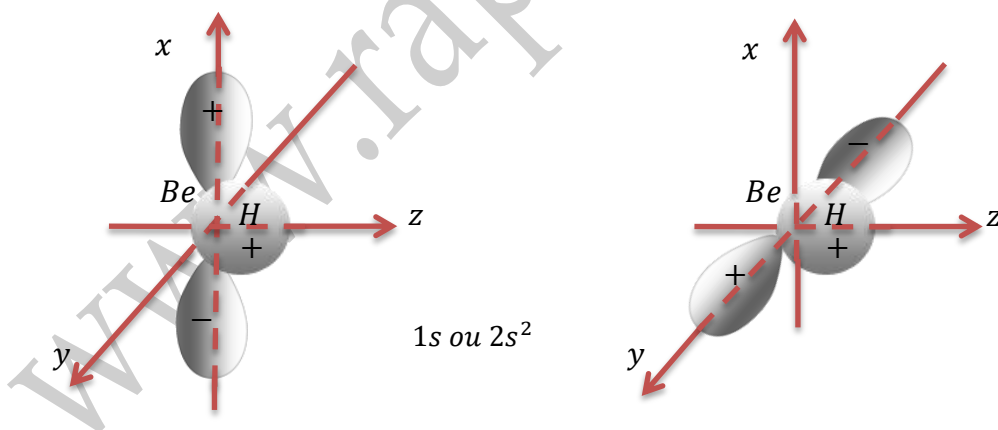
$$= a_4 2p_z + b_4 (-1s_1 + 1s_2)$$

Les schémas correspondants :

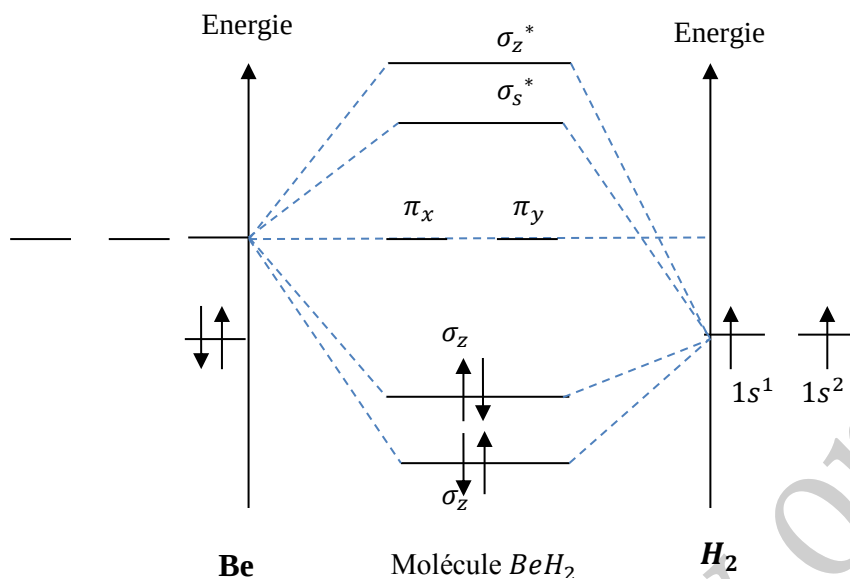




Les recouvrement des OA $1s$, et $1s_2$ des atomes H avec les OA $2p_x$ et $2p_y$ de Be sont nuls.



b) Le diagramme énergétique :

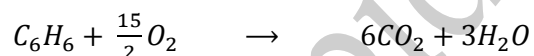


La structure électronique de valence de BeH_2 s'écrit donc : $\sigma_s^2 \sigma_z^2$

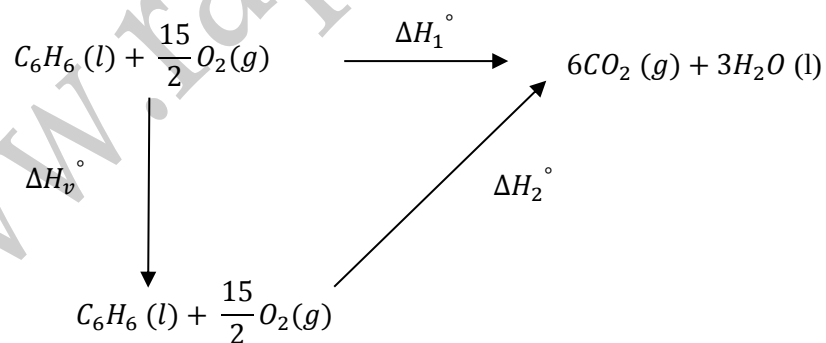
FSSM - Extrait de Contrôle Année: Juin 1979

Exercice 6

- a) La réaction de combustion du benzène :



- b) L'enthalpie de vaporisation du benzène ΔH_v° à 25°C peut être calculée à partir du cycle suivant :



- c)

D'après la loi de Hess, on a $\Delta H_v^\circ = \Delta H_1^\circ - \Delta H_2^\circ$.

A.N : $\Delta H_v^\circ = 8,10 \cdot 10^3 \text{ cal/mole}$.